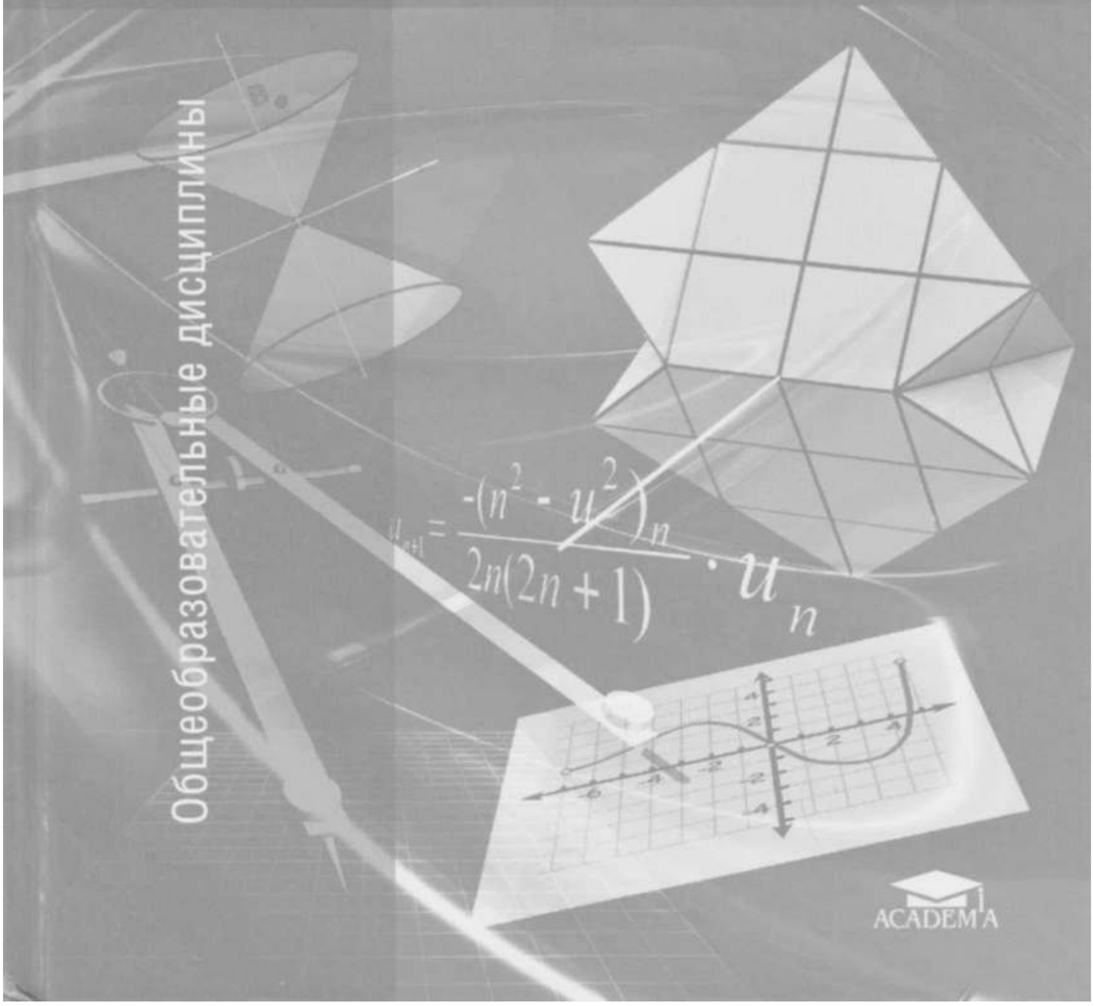
Начальное
и среднее
профессиональное
образование

М. И. Башмаков

МАТЕМАТИКА

КНИГА ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ

Методическое
пособие



Общеобразовательные дисциплины

ACADEMA

НАЧАЛЬНОЕ И СРЕДНЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

М. И. БАШМАКОВ

МАТЕМАТИКА
КНИГА ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ

Рекомендовано
Федеральным государственным автономным учреждением
«Федеральный институт развития образования» (ФГАУ «ФИРО»)
в качестве методического пособия для использования
в учебном процессе образовательных учреждений, реализующих
программы начального и среднего профессионального образования

Регистрационный номер рецензии 415
от 24 июля 2012 г. ФГАУ «ФИРО»

ACADEMA

Москва
Издательский центр «Академия»
2013

УДК 51:37.02(075.32)
ББК 74.262.21я723я722
Б336

Рецензент —
методист, преподаватель математики высшей квалификационной категории ГБОУ СПО «Гуманитарный колледж информационно-библиотечных технологий № 58» *Н.В.Пименова*

Башмаков М.И.

Б336 Математика. Книга для преподавателей : методическое пособие для НПО, СПО / М.И.Башмаков. — М. : Издательский центр «Академия», 2013. — 224 с.

ISBN 978-5-7695-9335-2

Методическое пособие подготовлено в помощь преподавателям математики учреждений начального и среднего профессионального образования и включено в учебно-методический комплект «Математика», который состоит из учебника, задачника, сборника задач профильной направленности и данного пособия.

В пособии представлено примерное поурочное планирование в пяти вариантах, приведены рекомендации по подготовке к контрольным работам, а также даны образцы контрольных работ по всем темам курса и разобраны решения наиболее сложных задач. Уделено внимание методике систематизации знаний обучающихся и изложены некоторые общепедагогические вопросы, которые могут быть полезны для общей педагогической квалификации преподавателя.

Для преподавателей учреждений начального и среднего профессионального образования. Может быть полезно учителям математики средних школ, лицеев, гимназий.

УДК 51:37.02(075.32)
ББК 74.262.21я723я722

ISBN 978-5-7695-9335-2

Предисловие

Учебно-методический комплект (УМК) «Математика» для учреждений начального и среднего профессионального образования состоит из учебника, двух задачников и книги для учителя. Основой УМК является учебник, рекомендованный Федеральным институтом развития образования и полностью соответствующий одобренной программе изучения математики в учреждениях НПО и СПО. Он может быть использован учебными заведениями, реализующими образовательную программу среднего (полного) общего образования при подготовке квалифицированных рабочих и специалистов среднего звена независимо от профиля и используемого учебного плана. Следует отметить, что автор учебника был основным разработчиком первой программы. В УМК входят два задачника — основной, включающий достаточно полный комплект заданий различного типа, и прикладной, содержащий образцы заданий, которые призваны углубить профессиональную и прикладную направленность обучения. Необходимо отметить характерные черты задачников.

Основной задачник содержит задания, предусматривающие различные формы учебной деятельности и обеспечивающие как базовый, так и профильный уровни формирования умений, предусмотренных программой.

Прикладной задачник ориентирован на решение следующих задач:

- знакомство с прикладными возможностями основных математических понятий;
- овладение навыками работы в «стандартных» прикладных ситуациях;
- приобретение опыта длительной «проектной» работы по построению и использованию математических моделей.

Задачник дает материал по каждому из указанных направлений. Его первая часть содержит задачи и упражнения прикладного характера по каждой из 12 глав учебника. Они могут рассматриваться как естественное дополнение к материалам основного задачника. Следует иметь в виду, что прикладная направленность этих задач состоит не в том, что их формулировки насыщаются «производственным содержанием». Главный упор делается на выделение важнейших стилевых особенностей, которые встречаются в приложениях. Иногда эти приложения становятся просто внутриматематическими. Например, геометрия, которая испокон веков стоит ближе всего к применениям математики, требует переноса знаний из других разделов математики. Процесс этого переноса является важнейшим элементом подготовки к использованию математики, и получить такой опыт разумнее всего, оставаясь на первых порах внутри самой математики.

Вторая часть задачника представляется более сложной. В ней выделены некоторые ситуации, сюжеты, в исследовании которых открывается широкое поле деятельности — перевод ситуации на математический язык, постановка математической задачи, нахождение подходов к ее решению, обсуждение результатов и т. п. Такой путь овладения приложениями математики самый эффективный, однако он имеет некоторые серьезные трудности.

Эти трудности связаны, прежде всего, с выбором сюжета. Ситуации, которые можно назвать прикладными, профессиональными, производственными, требуют для своего описания информацию, находящуюся вне математики. Нецелесообразно (и трудно как для учителя, так и для обучающегося) включать в задачи специальные сюжеты, не знакомые в деталях каждому человеку. Традиционная математика использует несколько прикладных сюжетов, которые уже считаются частью самой математики и не требуют дополнительной работы по их осмыслению. К числу таких сюжетов можно отнести задачи на равномерное движение, сложение движений и их скоростей, задачи на производительность труда и проценты. В то же время изменения условий жизни требуют включения в корпус математики ряда новых ситуаций. Включая в задачник новые и традиционные сюжеты, сложно рассчитывать на то, что каждый из них будет непременно использован и включен в календарный план. Выбор сюжета и объем работы с ним должен зависеть от профессиональной направленности обучения, подготовки преподавателя и обучающихся.

Следует предупредить, что идея создания задачника, обеспечивающего профессиональную ориентацию обучения математике на основе «проектной» деятельности, является достаточно новой и требует накопления опыта. Изданный вариант задачника является первым приближением к решению поставленной цели.

В настоящей книге, написанной в помощь преподавателю, помещен краткий комментарий всех глав учебника с примерным поурочным планированием в пяти вариантах (по числу предусмотренных программой вариантов тематического плана). К главам 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10 приведены рекомендации по подготовке к контрольным работам. Комментарий сопровождается указаниями по решению некоторых задач из основного задачника.

Помимо методических указаний по использованию учебно-методического комплекта включено изложение нескольких общепедагогических вопросов, которые лежат в основе позиции автора и могут оказаться полезными для повышения общей педагогической квалификации преподавателей.

В конце книги приведены контрольные работы по всем темам курса математики.

I ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Введение

В учреждениях начального и среднего профессионального образования математика изучается как единый предмет. Примерная программа этой учебной дисциплины, одобренная Федеральным институтом развития образования, согласована с действующим стандартом изучения математики, принятым для образовательных учреждений РФ, реализующих программы общего образования.

В соответствии с «Рекомендациями по реализации образовательной программы», выпущенными Департаментом государственной политики в сфере образования Министерства образования и науки Российской Федерации:

- математика изучается как *базовый учебный предмет*:
  — при освоении профессий НПО и специальностей СПО естественно-научного профиля в учреждениях НПО — в объеме 273 ч, в учреждениях СПО — 156 ч;
  — при освоении специальностей гуманитарного профиля в учреждениях СПО — в объеме 117 ч;
- математика изучается как *профильный учебный предмет*:
  — при освоении профессий НПО и специальностей СПО технического профиля в учреждениях НПО — в объеме 351—312* ч, в учреждениях СПО — 312 ч;
  — при освоении профессий НПО и специальностей СПО социально-экономического профиля в учреждениях НПО — в объеме 312—273* ч, в учреждениях СПО — 312 ч.

Примерная программа ориентирована на достижение следующих целей:

---

* В зависимости от общего объема учебного времени, выделяемого в учебном плане учреждения начального профессионального образования на общеобразовательную подготовку.

■ ***формирование представлений*** о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;

■ ***развитие*** логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;

■ ***овладение математическими знаниями и умениями***, необходимыми в повседневной жизни, для изучения смежных естественно-научных дисциплин на базовом уровне и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;

■ ***воспитание*** средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей.

Основу примерной программы составляет содержание, согласованное с требованиями федерального компонента Государственного стандарта среднего (полного) общего образования базового уровня.

В программе учебный материал представлен в форме чередующегося развертывания основных содержательных линий:

■ *алгебраическая линия*, включающая систематизацию сведений о числах; изучение новых и обобщение ранее изученных операций (возведение в степень, извлечение корня, логарифмирование, синус, косинус, тангенс, котангенс и обратные к ним); изучение новых видов числовых выражений и формул; совершенствование практических навыков и вычислительной культуры, расширение и совершенствование алгебраического аппарата, сформированного в основной школе, и его применение к решению математических и прикладных задач;

■ *теоретико-функциональная линия*, включающая систематизацию и расширение сведений о функциях, совершенствование графических умений; знакомство с основными идеями и методами математического анализа в объеме, позволяющем исследовать элементарные функции и решать простейшие геометрические, физические и другие прикладные задачи;

■ *линия уравнений и неравенств*, основанная на построении и исследовании математических моделей, пересекающаяся с алгебраической и теоретико-функциональной линиями и включающая развитие и совершенствование техники алгебраических преобразований для решения уравнений, неравенств и систем; формирование способности строить и исследовать простейшие математические модели при решении прикладных задач, задач из смежных и специальных дисциплин;

- *геометрическая линия*, включающая наглядные представления о пространственных фигурах и изучение их свойств, формирование и развитие пространственного воображения, развитие способов геометрических измерений, координатного и векторного методов для решения математических и прикладных задач;

- *стохастическая линия*, основанная на развитии комбинаторных умений, представлений о вероятностно-статистических закономерностях окружающего мира.

Развитие содержательных линий сопровождается совершенствованием интеллектуальных и речевых умений путем обогащения математического языка, развития логического мышления.

Математика является фундаментальной общеобразовательной дисциплиной со сложившимся устойчивым содержанием и общими требованиями к подготовке обучающихся. Реализация общих целей изучения математики традиционно формируется в четырех направлениях — методическое (общее представление об идеях и методах математики), интеллектуальное развитие, утилитарно-прагматическое направление (овладение необходимыми конкретными знаниями и умениями) и воспитательное воздействие.

Профилизация целей математического образования отражается на выборе приоритетов в организации учебной деятельности обучающихся. Для технического и естественно-научного профилей выбор целей смещается в прагматическом направлении, предусматривающем усиление и расширение прикладного характера изучения математики; преимущественной ориентации на алгоритмический стиль познавательной деятельности. Для гуманитарного и социально-экономического профилей более характерным является усиление общекультурной составляющей курса с ориентацией на визуально-образный и логический стили учебной работы.

Изучение математики как профильного учебного предмета обеспечивается:

- выбором различных подходов к введению основных понятий;

- формированием системы учебных заданий, обеспечивающих эффективное осуществление выбранных целевых установок;

▪ обогащением спектра стилей учебной деятельности за счет согласования с ведущими деятельностными характеристиками выбранной профессии.

Профильная составляющая отражается в требованиях к подготовке обучающихся в части:

▪ общей системы *знаний*: содержательные примеры использования математических идей и методов в профессиональной деятельности;

▪ *умений*: различие в уровне требований к сложности применяемых алгоритмов;

▪ практического использования приобретенных знаний и умений: индивидуального учебного опыта в построении математических моделей, выполнении исследовательских и проектных работ.

Таким образом, программа ориентирует на приоритетную роль процессуальных характеристик учебной работы, зависящих от профиля профессиональной подготовки, акцентирует значение получения опыта использования математики в содержательных и профессионально значимых ситуациях по сравнению с формально-уровневыми результативными характеристиками обучения.

Перечень тем в курсе математики является общим для всех профилей получаемого профессионального образования и при всех объемах учебного времени независимо от того, является предмет базовым или профильным. Предлагаемые в примерном тематическом плане разные объемы учебного времени на изучение одной и той же темы рекомендуется использовать для выполнения различных учебных заданий. Тем самым различия в требованиях к результатам обучения проявятся в уровне навыков по решению задач и в опыте самостоятельной работы.

В программе курсивом выделен материал, который при изучении математики контролю не подлежит.

Примерная программа учебной дисциплины «Математика» служит основой для разработки рабочих программ, в которых образовательные учреждения начального и среднего профессионального образования уточняют последовательность изучения учебного материала, профессионально значимый материал, распределение учебных часов с учетом профиля получаемого профессионального образования, виды самостоятельной работы обучающихся, примерные темы для исследовательских и лабораторных работ.

Математика как часть гуманитарной культуры

Регулярно происходящий пересмотр содержания математического образования (на любом уровне) обычно сопровождается рассуждениями о применимости тех или иных математических знаний в повседневной жизни. Представление о математике как о наборе инструментов, обслуживающих определенный (и на практике достаточно ограниченный) круг деятельности, является общепринятым. В качестве примера приведем известное высказывание знаменитого математика и кораблестроителя академика А. Н. Крылова: «Для инженера <математика> — это есть средство, это есть инструмент такой же, как штангель, зубило, ручник, напильник для слесаря или полусаженок, топор и пила для плотника». С 1935 г., когда были написаны эти слова, многое изменилось, например упомянутый Крыловым набор рабочих инструментов кажется несколько устаревшим. В таком же русле происходит и пересмотр математических инструментов: построения циркулем и линейкой теперь не применяются, на смену логарифмической линейке пришел калькулятор, поэтому для вычислений нет необходимости приводить к виду, удобному для логарифмирования, и т. п. При этом основной подход к отбору содержания образования остается сугубо прагматическим. К нему добавляются лишь сетования о «перегрузке» обучающихся и излишних «сложностях и тонкостях» традиционного курса.

Рассматривая вопрос об определении содержания обучения математике, приведем несколько тезисов. Они ориентированы прежде всего на обучение в учебных учреждениях гуманитарного профиля, хотя с определенными добавлениями могут быть восприняты и в более широком контексте.

1. Место математики в системе общечеловеческих ценностей, на овладение которыми нацелена система образования, определяется тем глубоким воздействием, которое она может оказать на развитие личности индивидуума. В настоящее время из различных граней этого воздействия наибольшее значение приобретают те стороны математики, которые в обычной схеме обучения больше примыкают к ее гуманитарной составляющей.

2. Главное богатство математики — это созданный ею мир идей. Наиболее значительные из них должны войти в сознание каждого конкретного человека независимо от выбираемого им

профессионального пути. Не следует смешивать саму идею с ее традиционным носителем в виде каких-нибудь формул или правил действий. Фундаментальные математические идеи имеют столь глубокие связи с различными сторонами жизни человека, что всегда можно найти подходящую интерпретацию этой идеи, соответствующую индивидуальным чертам или особенностям человека, тому, что психологи стали называть «познавательным стилем». Колоссальная опасность в происходящих изменениях в содержании обучения заключается в изгнании из общего образования ряда важнейших идей под предлогом разгрузки курса, заметное обеднение его содержания. Неумение найти необходимые методические или технологические решения вуалируются разговорами о «ненужности для всех», сложности, перегруженности и т. п. Приведем возможно наиболее крайний и спорный пример. Только что из программы исключена тема «Интеграл». Разумеется, если эту тему сводить к технике интегрирования и шаблонным задачам на вычисление, то в таком виде она в общей программе не нужна. Однако идея интегрирования как идея восстановления целого по его части зафиксировала длинный путь развития человеческой мысли, облекла эту идею в различные одежды. Она не столь проста (иначе не потребовались бы тысячелетия для ее кристаллизации), но тем важнее найти подход к ее овладению каждым человеком.

Содержательность обучения математике, его идейную насыщенность надо увеличивать, а не снижать.

3. Важной составной частью гуманитарной культуры человека является широкий спектр способов его деятельности. Посмотрите на формулировки заданий в учебнике математики. Их можно свести к десятку шаблонных операций, овладение которыми многими и принимается за цель обучения математике (тем более если выполнение этой цели связывать с успешностью прохождения различных экзаменов и проверок). Существенное расширение способов «математической деятельности» обучающихся — вот важнейшее направление педагогических поисков. При этом стоит посмотреть на опыт преподавателей гуманитарных предметов. Следует признать, что в течение длительного времени основным источником прихода в обучение математике новых методов является анализ приложений математики. Усиливая прикладную направленность курса математики, необходимо исследовать приложения математики в гуманитарной сфере, которые отнюдь не так «инструментальны», как в технической сфере, и, следовательно, не так легко различимы.

Таким образом, ориентация обучения математике на общее развитие личности, усиление идейной и содержательной насыщенности курса и расширение спектра форм учебной деятельности — таковы основные перспективы, которые позволяют сделать математику достойной частью гуманитарной культуры каждого человека.

Продуктивное обучение математике по учебнику нового поколения

Новое поколение — словосочетание, которое стало сейчас очень распространенным. К естественному представлению о новом поколении людей, садящихся за парты, добавились такие понятия, как новое поколение стандартов, новое поколение технических средств, новое поколение учебников как характеристики текущего момента. Следует заметить, что этот термин применяется не для констатации свершившегося факта типа «появились стандарты или учебники нового поколения», а скорее в качестве желаемой цели — нужны новые средства, которые отвечали бы происходящим в жизни изменениям. В многообразии этих изменений выделим следующие моменты:

- новые общественно-социальные запросы в области образования;
- изменение в индивидуально-психологическом настрое обучающихся;
- новые технические возможности, поддерживающие процесс обучения.

Для анализа этих изменений и поиска путей ответа на запросы, которые эти изменения ставят, необходимо стать на какую-то твердую почву, опереться на какую-либо единую педагогическую систему, которая определила бы вектор развития с комплексных позиций. Педагогическая наука создала ряд таких систем, получивших широкую известность и хорошо зарекомендовавших себя на практике. Однако изменения происходят так быстро, что необходимо появление новых систем, которые не порывали бы с имеющимися традициями и в то же время были лучше приспособлены к новым запросам. Одной из таких систем является система продуктивного обучения, основы которой были заложены в конце 80-х годов XX в. в работах немецких и российских педагогов. В рамках этой системы работают Институты продуктивного обучения (Institutes for Productive Learning) в Санкт-Петербурге, а также Германии, Испании, Венгрии и других странах. Их деятельность объединена большой международной сетью INEPS (International Network of Productive Schools), на ежегодные конгрессы которой собираются представители более 20 стран.

Сформулируем кратко основные концепции системы ***продуктивного обучения***, выделяющие ее из других педагогических систем:

- ориентация на профессиональное и социальное самоопределение обучающегося. Эта позиция предусматривает существенное увеличение ответственности обучающегося за свое обучение, изменение роли преподавателя и вообще отношений между обучающимся и преподавателем (в частности, отрицание позиции «ведущий — ведомый»);
- процесс важнее результата. Это означает сдвиг с ориентации на конечный результат (типа овладения определенными знаниями и навыками, которые могут оказаться невостребованными) на овладение широким спектром активных познавательных умений, обогащение палитры стилей обучения как основы формирования индивидуальных образовательных траекторий;
- расширение образовательного пространства, информационной среды обучения. Эта позиция раздвигает стены учебного кабинета и позволяет включить в систему обучения многочисленные новые ресурсы.

Теперь перейдем к рассмотрению ***продуктивности обучения математике***. Любопытно заметить, что именно анализ деятельности в области математики послужил толчком для психологов, работы которых лежат в основе продуктивного обучения. Так, книга выдающегося немецкого психолога М. Вертгеймера «Продуктивное мышление», написанная более полувека назад и переведенная на русский язык, насыщена примерами из математики. С другой стороны, современные работы российского психолога М. А. Холодной во многом основаны на анализе педагогического проекта по обучению математике, реализуемого коллективом томских педагогов во главе с Э. Г. Гельфман. На самом деле, особенностью продуктивного обучения является как раз целостное рассмотрение всей системы обучения, а не выделение предметных блоков и создание для них специального методического обеспечения. Однако именно в математическом блоке особенно ярко проявляются черты этой системы. Отметим несколько характерных черт системы поддержки математического образования методами продуктивного обучения.

Создание системы параметров результативности обучения математике. Краткая схема этих параметров приведена на с. 15.

В основу системы положено разделение многообразных параметров, характеризующих уровень обучения математике, на три группы:

1) определяет *общее развитие личности обучающегося*, раскрывает развивающую функцию обучения. В эту группу включены такие параметры: алгоритмическая направленность, развитие дедуктивного, логического мышления, развитие пространственных геометрических и графических представлений, математическая речь, способность совершать сложные умственные действия (анализ, синтез, обобщение, конкретизация, установление аналогий и т. п.);

2) объединяет более традиционные критерии *результативности обучения*, которые можно связать с образовательной, обучающей функцией предмета. Разработка этой группы параметров проведена в соответствии с основными содержательными линиями обучения математике;

3) представляет собой *продуктивную деятельность* обучающегося. Она наиболее сложна по своей структуре, так как тесно связана с двумя предыдущими. Выделение этой группы принципиально важно, так как она ориентирует преподавателя на некоторые стороны развития обучающегося, внимание к которым значительно ослаблено. Эту группу можно было бы условно разделить на две подгруппы. Одна из них выделяет параметры, относящиеся к прикладной направленности обучения (построение математических моделей, организация вычисления, исследование результата и т. п.). Вторая подгруппа ориентирована на развитие творческих способностей, самостоятельности, индивидуальных сторон личности обучающегося, тесно связана с воспитательной функцией обучения (умение организовать самообразование, самостоятельно пользоваться литературой, навыки самоконтроля, развитие сообразительности, рост творческих навыков и т. д.).

Сформулированные положения имеют не только теоретическую ценность. С их позиций можно анализировать появляющиеся новые учебные материалы. Они могут быть ориентиром и в издательской, креативной работе.

Так, можно прямо указать ряд появившихся в недавнее время учебников, в которых реализованы описанные установки. Это обсуждение уместнее отнести к общему анализу российского образования.

ПАРАМЕТРЫ РЕЗУЛЬТАТИВНОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

- **ОБЩЕЕ РАЗВИТИЕ ЛИЧНОСТИ**
  - Алгоритмическая деятельность
  - Логико-дедуктивное мышление
  - Визуально-образное мышление
  - Математическая речь и символика
- **ОБЪЕМ НАУЧНЫХ ЗНАНИЙ**
  - Широта и качество знаний по содержательным линиям обучения
    - Динамика индивидуального усвоения знаний
    - Глубина знаний в выбранном разделе
  - Вычисления и тождественные преобразования
    - Функции и графики
    - Уравнения и неравенства
    - Фигуры и тела
    - Измерения величин и геометрические преобразования
    - Анализ числовых данных. Статистика и вероятность
- **ПРОДУКТИВНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ**
  - **Развитие творческих способностей**
    - Самостоятельность
    - Сообразительность
    - Способность к обобщению
    - Способность ориентироваться в новой ситуации
  - **Прикладная направленность мышления**
    - Организация вычислений
    - Моделирование
    - Исследование результата
    - Самоконтроль

Познавательные стили. Совершенно очевидно, что положительная оценка эффективности обучения по большинству качественных параметров должна быть основана не на измерении конечного результата (эти параметры, как правило, не допускают линейной упорядоченности), а на анализе *процесса обучения*. При следовании положениям гуманистической психологии «воспитатель не стремится к определенному заранее результату. Усилия воспитателя направлены ... на раскрытие своих индивидуальных способностей, на поддержку его внутренней силы, а не на формирование конкретных нормативных способностей. Если обеспечены условия, необходимые для ПРОЦЕССА свободного развития человека, его личностного роста, то позитивные РЕЗУЛЬТАТЫ будут достигнуты самим человеком обязательно, хотя, возможно, не легко и не сразу».

Для анализа процесса обучения и хода интеллектуального развития обучающегося М. А. Холодная предложила классифицировать эту деятельность по ее *познавательным стилям*. *Способность* характеризует уровень достижений в интеллектуальной деятельности (т. е. является ее результативной характеристикой). Стиль выступает как способ выполнения интеллектуальной деятельности (т. е. является ее процессуальной характеристикой). Соответственно разные стили могут обеспечивать одинаково высокую успешность решения определенной задачи. В классификацию познавательных стилей, предложенную М. А. Холодной (2000), входят:

- стили кодирования информации;
- стили переработки информации;
- стили постановки и решения проблем.

Параллельно классификации познавательных стилей с позиций психолога была разработана классификация ***познавательных стилей изучения математики***:

- алгоритмический;
- визуальный;
- прикладной;
- дедуктивный;
- исследовательский;
- комбинаторный;
- игровой.

Дадим краткие пояснения. *Алгоритмический стиль* — наиболее распространенный в современных образовательных учреждениях способ действия обучающегося по выполнению четко сформулированных типовых заданий обычно по известному образцу. По проведенным оценкам, в действующих учебниках число заданий, относящихся к алгоритмическому или, более широко, репродуктивному стилю, превышает 80 %. В то же время мы не хотим представить этот стиль как нечто низменное и малосодержательное. Подробнее спектр заданий алгоритмического стиля будет рассмотрен при анализе учебных материалов. Сейчас отметим лишь то, что к этому стилю нужно отнести и такие задания, в которых обучающийся самостоятельно знакомится с неизвестным ему ранее алгоритмом, выбирает алгоритм либо видоизменяет или адаптирует уже известный способ действия.

Название *«визуальный стиль»* является наиболее условным. В его основе лежит деятельность по переводу информации с одного языка на другой, овладение разными языками, прежде всего визуальным. Согласно распространенной точке зрения при изучении математики используются три основных информационных языка — вербальный (словесное представление информации), символьный (последовательность специальных знаков, символов) и визуальный (зрительные образы). Овладение всеми этими языками — неоспоримая задача обучения математике. При этом важную роль играет умение выбрать подходящий ситуации информационный язык и при необходимости осуществить перевод с одного языка на другой. При этом надо учесть растущую актуальность визуального языка, которая и побудила здесь назвать обсуждаемый стиль визуальным.

Можно снова сослаться на результаты исследований последних десятилетий, полученные психологами. Согласно этим результатам визуальный язык «позволяет сделать смысл видимым». С его помощью можно создавать визуальные образы и оперировать с ними на таком же уровне, как это делается обычными словесно-знаковыми средствами.

В использовании *прикладного стиля* преподаванием математики в образовательных учреждениях России заложены богатые традиции. Сюда надо отнести организацию вычислений, решение текстовых задач и, в более широком смысле, построение математических моделей и их исследование. В то же время практическая реализация этого стиля наталкивается на большие трудности. Обсуждение внематематической ситуации и построение модели требует много времени, что часто выглядит неоправданным по сравнению с полученными результатами. Кроме того, преподаватель не всегда знаком с деталями обсуждаемой ситуации и ему необходимо много времени тратить на подготовку к уроку. Все это заставило ограничиться регулярным использованием нескольких стандартных ситуаций. В то же время становится необходимым введение новых ситуаций, в частности, с использованием математики в экономике, гуманитарной сфере, новых разделах физики.

Дедуктивный стиль считается ведущим в изучении математики. Овладение им традиционно связывается с геометрией. Однако в последние десятилетия в использовании дедуктивного (логического) стиля произошли значительные изменения. Во-первых, считавшееся незыблемым аксиоматическое построение геометрии с четкой системой определений и теорем сильно поколеблено течением, отвергающим как необходимость, так и возможность дедуктивного построения геометрии в учреждениях НПО и СПО, что нашло свое отражение в ряде новых учебников. Во-вторых, элементы доказательства при решении геометрических задач отошли на второй план отчасти из-за невозможности воспитать соответствующие навыки при уменьшении числа часов, отчасти из-за повышенного внимания к вычислительным задачам.

В известной мере понижение внимания к дедуктивному стилю работы является следствием разрыва в преподавании алгебры и геометрии, упорным отказом рассмотреть вопрос слияния двух математических предметов в один, а также методическая неразработанность самого курса алгебры, который имеет неограниченные содержательные возможности использования дедуктивного стиля.

Исследовательский стиль в последние годы стал находиться в центре внимания преподавателей. Этому способствовало распространение задач с параметрами, широкое использование координатного метода. Вместо серий отдельных мелких задач и упражнений стали чаще предлагаться сюжетные задания, требующие длительной работы в рамках одной математической ситуации.

Однако исследования могут служить не только «вкусной добавкой к традиционному блюду». Роль исследовательского стиля на всех этапах обучения математике может быть сделана ведущей, а сам стиль — доступным.

Если кратко упомянутые первые пять стилей являются достаточно традиционными для преподавания (различия связаны, прежде всего, со степенью их использования и взаимосвязями между ними), то последние два — комбинаторный и игровой — выглядят, на первый взгляд, несколько инородными вкраплениями.

Под *комбинаторным стилем* понимается широкое использование дискретных понятий и методов — натуральные и целые числа, пошаговые, индуктивные процессы и построения, последовательности, конечные ряды числовых данных, элементы логики, наконец, сама комбинаторика и элементы теории вероятностей. Может показаться, что идет речь о нескольких конкретных темах школьной программы (целые числа, последовательности, статистика и теория вероятностей), что в значительной мере справедливо, однако назрела потребность (в связи с широким использованием цифровых технологий в быту и на производстве) заботиться о воспитании дискретного стиля (мы назвали его комбинаторным) на всех этапах обучения математике.

Возможности *игрового стиля* давно исследуются его энтузиастами. Все согласны с утверждениями психологов о том, что игры могут стать основной пружиной развития интереса к математике, а вслед за ним и успехов в учении, однако теоретических и методических разработок, помогающих включить в процесс обучения игровой стиль на равных правах с остальными стилевыми возможностями, еще явно недостаточно.

Подводя итог, обратим внимание на то, что практика работы российских образовательных учреждений по новым учебникам использует многообразие познавательных стилей, в том числе при введении и развитии математического понятия, при выполнении учебного задания, при индивидуализации обучения.

Профили и уровни. Важнейшим направлением модернизации образования в России стал переход к профильному обучению. Этот период является важным и необходимым при отходе от идеологии единого уровня. К сожалению, в официальных документах была проявлена терминологическая неточность, спутавшая термины *профиль* и *уровень*, давно разведенные педагогикой. Так появились несколько нелепые формулировки «базовый уровень» и «профильный уровень», сильно путающие преподавателей.

Уровневые характеристики (оценки) обучения весьма распространены как в бытовом, так и в профессиональном языке. Часто упоминают *высокий уровень* школьного математического образования в России, дают формулировки *минимального уровня* обученности, формируют классы с *углубленным уровнем* изучения математики, жалуются на падение *уровня математической подготовки* выпускников школы и т. д. Не занимаясь подробным анализом понятия *уровень обучения*, отметим, что обычно оно имеет некоторую оценочную, количественную основу. Имеется в виду не выражение уровня конкретным числом, а возможность сравнения, линейной упорядоченности при оценке уровня.

Выбор уровня обучения (зачастую отождествляющийся с количеством отводимых часов) диктует выбор объема изучаемого материала, количество решаемых задач, распределение форм учебной работы. В практике последних лет сложилось представление о трех основных уровнях изучения математики — основном, или стандартном, и двух других, отступающих от него в разные стороны, — минимальном и повышенном (углубленном).

Термин *профиль обучения* оказался, к сожалению, очень размытым. В профессиональном обучении этот термин имеет достаточно ясный смысл и связан с получаемой профессией. Одно из возможных направлений профилизации обучения математике идет как раз из сферы профессиональной подготовки. Хотя уже давно отказались строить отдельно «математику для токарей» и «математику для пекарей», но сохраняются представления о профилизации математики для крупных групп специальностей (математика для будущих экономистов, для электрорадиотехнических специальностей, для работников гуманитарной сферы и т. п.). Такой тип профилизации (помимо объема, который относится к уровневой категории) обычно проявляется в выборе примеров и задач, а также в добавлении (исключении) отдельных тем программы. В целом для общего среднего образования такой подход потерял свою актуальность.

Развиваемый в настоящее время подход к профилизации обучения математике основан на следующей позиции. Профиль характеризуется выбором ведущих способов деятельности, их взаимодействием и сбалансированностью. Например, можно обратиться к изложенным выше стилевым различиям в изучении математики и формировать тот или иной его профиль, по-разному ориентируя на использование различных познавательных стилей.

Такое понимание профиля обучения математике легко сопрягается с выбором будущей профессии. Среди различных классификаций спектра профессий есть и такая, которая во главу угла ставит ведущую специфику профессиональной деятельности, что поможет определить выбор ведущих познавательных стилей в обучении математике.

Изложенное понимание профиля легко согласуется и с распространенной «бытовой» точкой зрения, различающей, например, гуманитарный, технический или математический профиль. Традиционно построенные курсы и учебники математики можно в первом приближении отнести к техническому профилю (еще недавно это направление называлось «политехническим» и было нацелено на подготовку будущих рабочих, техников и инженеров). Этому профилю соответствует преобладание алгоритмических и конструктивных способов действия. Визуальные методы применяются лишь для подкрепления материала наглядными образами, очень осторожно используются логика и рассуждения, усилено внимание к приложениям и межпредметным связям.

Слова «гуманитарный профиль» понимаются по-разному. Многие видят в нем вариант «компенсированного» обучения математике, ориентированного на тех, кто математикой заниматься не хочет и (или) не может. Для такого понимания вполне подойдет принцип «тех же щей, да пожиже влей». Более серьезная точка зрения ориентирована на принципиальную перестройку курса математики в сторону его общекультурной составляющей, что потребует значительного расширения визуально-образных и ассоциативных способов познания (за счет его алгоритмической составляющей), изменения характера приложений и возможного усиления логики и дедукции.

Достаточно разумно ограничиться тремя названными профилями математического образования. Во всяком случае, с позиций математики вряд ли можно построить больше трех-четырех различно профилированных курсов математики, имеющих действительно существенные различия качественного, а не количественного характера.

Модульность обучения. Продуктивность обучения может значительно возрасти, если представить его в виде последовательности небольших по размеру и длительности учебных модулей. При этом появляется возможность гибко использовать их расположение и взаимосвязь. Это особенно важно при изучении математики на базовом уровне, где нет разделения на два параллельных математических предмета, общее количество часов достаточно мало, а уровень подготовки обучающихся весьма различен.

Учебник может быть написан так, что он не предполагает линейного, последовательного изучения страницы за страницей. Во-первых, появляется возможность составить календарный план, по-разному чередуя учебные темы (главы учебника). Еще более важной является возможность использовать модульность при прохождении конкретной темы, варьируя порядок и степень внимания к различным стилям учебной деятельности, которые обозначены рубриками внутри каждой главы — основные понятия (теоретическая проработка темы), примеры (изучение темы на примерах), доказательства (анализ логической структуры содержания темы), основные задания (внимание к основным алгоритмам).

Процесс обучения. Важным элементом продуктивности можно считать усиление внимания к *процессуальной, деятельностной стороне* обучения, его обеспечение достаточно широким спектром учебных материалов «на любой вкус». Новым для преподавателя может оказаться то, что учебник и задачник к нему не предполагают того, что все обучающиеся проделают все предлагаемые задания. Выбор заданий — прерогатива преподавателя, который исходит из поставленных им целей обучения в конкретных условиях. Цель создаваемых новых учебных материалов — дать преподавателю достаточно богатый для этого материал. Поэтому не нужно будет жаловаться на то, что какие-то из включенных задач оказались трудными. В УМК тем самым может быть реализован важный принцип профессионального образования — повысить роль и ответственность обучающегося и преподавателя в выборе различных параметров изучения программы, включая уровневые характеристики и сбалансированность различных познавательных стилей.

Одним словом, учебник и задачники, написанные в соответствии с принципами профессионального образования, не навязывают методики обучения. Используя их, можно реализовать различные учебные траектории, как коллективные, так и индивидуальные.

Следует отметить, что если учебник более строго следует программе базового курса в части выбора содержания обучения, то прилагаемые к нему задачники с одинаковым успехом обслуживают как базовый, так и профильный уровень. Это важно, потому что в любой аудитории, занимающейся математикой по базовому курсу, найдутся обучающиеся, которым интересно, полезно и доступно перейти на более высокий уровень овладения предметом. Это естественно сделать не за счет расширения чисто теоретической подготовки, а за счет решения более разнообразного спектра задач. Наличие в задачниках системы исследовательских циклов, связанных с важными математическими идеями, позволит одновременно увеличить теоретическую базу, так как в этих циклах теория изучается «в задачах».

Учебная среда. Существенным элементом продуктивности, который достаточно четко прослеживается в новых учебных материалах, является расширение учебной среды, обогащение образовательных ресурсов.

К образовательным ресурсам обучения математике надо отнести, прежде всего, преподавателя, который остается центральной фигурой обучения, туда же следует отнести и обучающегося с его интеллектом и, разумеется, эти человеческие факторы, эти ресурсы являются центральными.

Следующая группа ресурсов связана с тем обеспечением, которое традиционно подбирается для реализации целей обучения. Прежде всего это то, что можно было бы назвать бумажными ресурсами. Сейчас эти бумажные ресурсы объединяются в понятие учебно-методического комплекта, который, как правило, состоит из учебника или серии учебников, различных вспомогательных учебных текстов, например по математике это могут быть задачники, дидактические материалы, рабочие тетради и, наконец, книги для преподавателя, содержащие методические рекомендации и описания технологий и методик.

Новую группу ресурсов, которая в последние десятилетия развивается особенно активно, назвали цифровыми образовательными ресурсами (к ней можно присоединить понятие сетевых ресурсов). И тем самым современный комплект должен обеспечить соединение традиционных, бумажных, текстовых ресурсов и более современных, цифровых и сетевых, ресурсов.

Функции учебника. На первое место поставим *информативную функцию* учебника. Разумеется, информативная функция не сводится к тому, чтобы учебник был источником готовых знаний, подлежащих запоминанию. Достаточно распространена мысль о том, что учебник должен быть прежде всего источником познавательных задач, которые обучающийся должен обнаружить и решить.

Управляющая функция учебника требует серьезной реконструкции форм и содержания традиционного учебника. На самом деле, управляющая функция учебника часто преувеличивается. Многие преподаватели считают учебник чем-то вроде конспекта поурочных планов и требуют того, чтобы в нем содержалось абсолютно все, что необходимо при организации обучения.

Развивающая функция учебника труднее всего прослеживается в современных публикациях. Развитие мотивационной сферы, личностных качеств, системы ценностных отношений должно быть в центре внимания учебника.

Одной из центральных функций учебника нового поколения является его *коммуникативная функция*. Однако развитие этой функции часто сводится к тому, что создается некий учебник-монолог, построенный на дедуктивной основе. Часто информация, представленная в учебнике, дается в предельно свернутом виде, без учета сложных процессов, которые должны происходить при его чтении.

Воспитательную функцию учебника обычно связывают с развитием интереса, наличием бесед с использованием живого языка, образных запоминающихся сравнений, вызывающих яркие ассоциации. Однако специфика математики позволяет видеть эту функцию в аргументированности и объективности стиля изложения.

Новые требования к современному учебнику — *дифференциация и индивидуализация обучения*. Дифференциация учебного текста понимается в основном как нечто внутритекстовое, реализующееся с помощью различных выделений — использования разнообразных шрифтов, символов, пиктограмм, рамок. Разумеется, это важное направление, однако очень часто оно приводит к обеднению учебного процесса, потому что заставляет сосредоточить усилия преподавателя на некоем минимальном уровне. Что же касается индивидуализации обучения, то в этом направлении сделано еще очень мало. Разумеется, индивидуализация не может сводиться к выделению текстов разной сложности. Сама композиция учебника должна способствовать организации индивидуальных траекторий обучения.

В целом можно наблюдать тенденцию, при которой современный учебник трактуется в качестве полифункциональной учебной книги.

Разумеется, учебники нового поколения должны в известной мере сочетаться с другими учебниками, особенно с теми, которые широко распространены. Это связано с традициями и опытом преподавателя, с возможными трудностями в обеспечении учебниками и т. д. Теоретическая сторона курса современных учебников хотя и не будет точно следовать общепринятым способам изложения (которые в учреждениях НПО и СПО, к сожалению, в большой степени копируют и вульгаризируют подходы высшей школы), однако достаточно легко будет вписываться в общий контекст математической культуры, что не будет препятствовать обучающимся расширять свой кругозор за счет использования других учебников.

Перечисленные требования к учебнику следовало бы отнести к учебно-методическому комплекту в целом, рассматривая его как некоторое единство. Учебник вряд ли сможет полноценно удовлетворить всем требованиям. Стремление к этому может привести к увеличению объема учебника, его перегрузке, к тому, что в нем будет трудно найти нужный материал. Одним из возможных решений противоречия между широким спектром требований к учебнику и ограниченностью возможностей его воспроизведения является передача ряда функций другим частям учебно-методического комплекса.

В заключение можно дать несколько советов преподавателям. Эти советы носят общий характер и имеют целью более выпукло изложить педагогические позиции и дать преподавателю возможность обдумать их и сравнить со своими представлениями об обучении математике.

1. *Процесс обучения важнее результата* — этот тезис уже обсуждался ранее достаточно подробно. Напомним, он означает, что эффективность выбираемой системы обучения должна определяться не суммой конкретных умений и навыков, а тем, насколько полно она позволяет раскрыть и развить интеллектуальные возможности обучающегося. Это развитие осуществляется в процессе учебной деятельности. Приобретение обучающимся опыта содержательной разнообразной деятельности должно стать основной учебной целью.

2. *Учить надо не по закону, а по понятиям.* Принятые официальные документы (стандарт, программы, положения о ЕГЭ и пр.) не предназначены для того, чтобы весь процесс обучения ориентировать на их выполнение. Целевые установки обучения не могут быть формализованы, а их достижение не может сводиться к суммарным количественным показателям. Эти установки определяются теми понятиями, которые вложены в нас нашими учителями, традицией и опытом предшествующих поколений. Мы знаем, чему и как надо учить, но не всегда можем дать этому четкую и исчерпывающую формулировку. Мы работаем для обучающегося, а не для начальства.

3. *«Бедность» не порок, но «богатым» быть лучше.* Многие учебники по математике можно охарактеризовать словами «честная бедность» — по ним легко и удобно работать, они гарантируют выполнение минимальных требований стандарта, их можно изучать «от сих до сих», строчку за строчкой. Однако надо помнить, что при этом за бортом могут оказаться важнейшие математические идеи, не раскрыться способности обучающегося. Не нужно бояться появления в учебном комплексе трудного, на ваш взгляд, материала. Учебник не рассчитан на то, что каждый обучающийся (и даже все обучающиеся) выполнит каждое помещенное в нем учебное задание.

4. *Учебник — это щедро накрытый стол.* Сложилась традиция линейного построения учебника, при котором на каждом уроке отрезается по маленькому ломтику. Такая структура оправдана, когда учебник используется как конспект. По нашему

убеждению, учебный комплект должен напоминать пиршественный стол, каждое блюдо на котором полезно, вкусно и доступно, но ни одно из них не должно быть признано строго обязательным — все съесть нельзя. Совокупность блюд превышает возможности любого обучающегося, и нет нужды стремиться даже попробовать каждое из них.

Составление «меню», т.е. поурочного плана, выбор необходимых материалов и средств обучения — прерогатива преподавателя.

5. *Смысл должен стоять впереди языка*. В обучении математике на первый план выступает понимание. Надо стремиться к тому, чтобы обучающийся понимал то, что делает и о чем говорит. Как он это называет и какие термины использует — второстепенные вопросы. Многие математические термины употребляются в различных смыслах. Когда вам кажется, что обучающийся произносит набор слов, смысл которых неясен, лучше не говорить ему, что это неверно, а переспросить, что он имеет в виду.

6. *Наши ученики умнее нас*. Самое вредное — это ссылаться на слабость группы и неподготовленность отдельных обучающихся. Если наше развитие в целом затормозилось, а в ряде направлений и вовсе остановилось, то у обучающихся все еще впереди и ставить барьеры на пути их умственного развития — брать на себя тяжелый грех.

Обучающийся оценивает каждого из нас. Учебник, как и преподаватель, не должен быть непогрешимым. Слово учебника, как и слово преподавателя, должно говорить о главном и не может быть истиной «в последней инстанции». Час, когда обучающийся поймет, что нами не все сказано, когда перед ним откроется путь, ведущий дальше преподанных нами премудростей, будет часом нашей победы, а не поражения.

Насколько изложенные общие положения нашли свою реализацию в данном учебно-методическом комплекте для учреждений начального и среднего профессионального образования, судить преподавателям.

Дидактическая система реализации целей обучения

Построение системы обучения исходит из следующей примерной схемы параметров развития личности, в формирование которых и должно внести вклад обучение математике:

Общее развитие личности	Вхождение в мир математики	Продуктивная деятельность
Алгоритмическая деятельность. Логико-дедуктивное мышление. Визуально-образное мышление. Математическая речь и символика. Формирование научного духа	Широта и качество знаний по основным содержательным линиям: числа и вычисления; функции и графики; уравнения и неравенства; анализ числовых данных (стохастика); фигуры и тела; измерение величин	Развитие творческих способностей. Прикладная направленность мышления. Моделирование. Исследование. Перенос в новую ситуацию

Эта схема заимствована из материалов работы Европейской комиссии по математическому образованию. Для нас важна не столько ее структура (которая кому-то может показаться спорной), сколько представление разнообразных параметров, которые не следует исключать из рассмотрения.

Введение новых понятий. Введение математических понятий в разрабатываемом курсе основано на следующих принципиальных положениях:

- мотивы появления нового понятия должны быть ясно и неформально описаны. При этом существенны сведения из истории науки, а также связи и параллели с другими отраслями знания;
- определение играет иную роль, чем обычно в линейном построении курса. С одной стороны, должна быть короткая понятная фраза, имеющая структуру определения, а с другой — необходимо стремиться к широте охвата различных явлений, описываемых данным понятием, не заботясь при этом о полном доказательстве эквивалентности различных подходов;
- визуально-графическое представление понятия должно быть выстроено так, чтобы оно было не вспомогательной иллюстрацией вербально вводимого понятия, а могло быть самостоятельной основой формирования правильного представления. В соответствии с новыми психолого-педагогическими воззрениями (Арнхейм, Зинченко) визуальное мышление способно не просто иллюстрировать, но и формировать научные понятия, брать на себя операционные функции работы с этими понятиями;

- примеры при этом играют особую роль, так как зачастую знакомство с некоторыми понятиями может сохраниться в долгосрочной памяти обучающегося именно на уровне примеров;
- приложения должны обязательно сопровождать курс, однако характер выбираемых приложений должен отражать гуманитарную направленность курса.

Обеспечение основных форм учебной деятельности. Учебник нового поколения должен иметь четкую схему стандартных форм учебной деятельности, которые в совокупности покрывают весь спектр описанных параметров развития личности, совокупность и сбалансированность которых определяет выбранную дидактическую систему. При этом сбалансированность достигается включением в корпус учебника системы основных заданий, а групповые и индивидуальные потребности обеспечиваются широким выбором заданий, представленных в задачниках.

Задание по каждому учебному модулю объединяет следующие формы учебной деятельности:

- тренажеры с предварительным списком алгоритмов, которыми нужно овладеть в результате работы по данным модулям (заметим, что в учебнике уровень овладения алгоритмом фиксируется только как минимальный, в то время как материалы практикума позволяют преподавателю и обучающемуся самостоятельно определять его верхнюю грань);
- задания на образное овладение материалом;
- задания на логико-дедуктивную сторону мышления (локальные доказательства, самостоятельное развитие теории);
- задания на развитие творческой и исследовательской направленности личности (исследовательские работы, задачи на смекалку);
- приложения;
- матричные тесты, развивающие способность переходить от одного языка представления информации к другому;
- материалы для самоконтроля (задания типа «да — нет», «верно — неверно» и др.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Башмаков М.И.* Информационная среда обучения / М.И.Башмаков, С.Н.Поздняков, Н.А.Резник. — СПб. : Изд-во «Свет», 1997.

2. *Башмаков М. И.* Теория и практика продуктивного обучения / М.И.Башмаков. — М. : Народное образование, 2000.

3. *Башмаков М.И.* Научное и практическое обеспечение национальной образовательной инициативы «Наша новая школа» в педагогическом образовании / М.И. Башмаков, М.А. Горяев, Л.И. Лебедева. — СПб. : ИПО, 2011. — С. 104—108.

4. *Башмаков М.И.* Современный учебник математики: на пути к сетевым ресурсам / М.И. Башмаков // Компьютерные инструменты в образовании. — 2007. — № 2.

5. *Башмаков М.И.* Функциональное назначение современного учебника // Вестник СЗО РАО.— СПб., 2010. — Вып. 1 (10). — С. 14—18.

6. *Вертгеймер М.* Продуктивное мышление / М. Вертгеймер. — М. : Прогресс, 1987. — С. 18, 27—28.

7. Вестник СЗО РАО. Образование и культура Северо-запада России. — СПб., 1997. — Вып. 1.

8. *Выготский Л.С.* Мышление и речь / Л.С. Выготский. — М.-Л. : Гос. учеб.-пед. изд-во, 1934. — 324 с.

9. *Леонтьев А.Н.* Избранные психологические произведения: в 2 т. / А.Н. Леонтьев. — М. : Педагогика, 1983. — Т. 2. — С. 94—231.

10. Математика в школе, 2011. — № 8. — С. 20—30.

11. Педагогическое образование в государствах — участниках СНГ: современные проблемы, концепции, теория и практика / [М.И. Башмаков и др.] — СПб. : ИПО, 2011. — С. 272—277.

12. *Розов Н.Х.* Педагогические инновации в высшей и средней школе / Н.Х. Розов. — М. : ФПО МГУ им. Ломоносова, 2004. — С. 30—45.

13. *Холодная М.А.* Психология интеллекта / М.А. Холодная. — 2-е изд. — СПб. : «Питер», 2002.

14. *Холодная М.А.* Школьные технологии / М.А. Холодная. — М. : Народное образование, 2000. — Вып. 4. — С. 12—16.

15. *Bardossi I.* Productive Learning in the Learning Workshop / [I. Bardossi, M. Bashmakov et al.] // Pilot Projects in Pecs, St. Petersburg and Berlin. — Berlin, 1999.

16. *Boehm I.* Produktives Lernen — eine Bildungschance fuer Jugendliche im Europa / I. Boehm, J. Schneider. — Berlin, 1996.

17. *Dimitric R.* Components of successful education / R. Dimitric // The teaching of Mathematics. — The Mathematical Society of Serbia, 2003. — Vol. VI, 2. — P. 69—80.

II МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ

Тематическое планирование к учебнику «Математика» для учреждений НПО и СПО

Планирование составлено в соответствии с программой изучения математики в учреждениях начального и среднего профессионального образования и является примерным.

Содержание темы	Количество часов (вариант программы)				
	273 (1)	156 (2)	312 (3)	351 (4)	117 (5)
Развитие понятия о числе Целые и рациональные числа, действительные числа, приближенные вычисления, комплексные числа, беседа «Числа и корни уравнений»	12	10	16	20	6
Корни, степени и логарифмы Повторение, корень n-й степени, степени, логарифмы, показательные и логарифмические функции, показательные и логарифмические уравнения и неравенства, беседа «Вычисление степеней и логарифмов»	32	16	38	38	12
Прямые и плоскости в пространстве Взаимное расположение прямых и плоскостей, параллельность прямых и плоскостей, углы между прямыми и плоскостями, беседа «Геометрия Эвклида»	24	10	24	24	8
Комбинаторика Комбинаторные конструкции, правила комбинаторики, число орбит, беседа «Из истории комбинаторики»	12	8	12	12	4

Содержание темы	Количество часов (вариант программы)				
	273 (1)	156 (2)	312 (3)	351 (4)	117 (5)
Координаты и векторы Повторение пройденного, координаты и векторы в пространстве, скалярное произведение, перпендикулярность прямых и плоскостей, беседа «Векторное пространство»	20	8	24	24	6
Основы тригонометрии Углы и вращательное движение, тригонометрические операции, преобразование тригонометрических выражений, тригонометрические функции, тригонометрические уравнения, беседа «Исторические сведения»	32	14	40	44	12
Функции и графики Обзор общих понятий, схема исследования функции, преобразования функций и действия над ними, симметрия функций и преобразование их графиков, непрерывность функции, беседа «Развитие понятия функции»	20	14	24	30	10
Многогранники и круглые тела Словарь геометрии, параллелепипеды и призмы, пирамиды, круглые тела, правильные многогранники, беседа «Платоновы тела»	30	10	30	30	10
Начала математического анализа Процесс и его моделирование, последовательности, понятие производной, формулы дифференцирования, производные элементарных функций, применение производной к исследованию функций, прикладные задачи, первообразная, беседа «Формулы Тейлора»	24	16	32	40	12

Содержание темы	Количество часов (вариант программы)				
	273 (1)	156 (2)	312 (3)	351 (4)	117 (5)
Интеграл и его применение Площади плоских фигур, теорема Ньютона—Лейбница, пространственные тела, беседа «Интегральные величины»	16	8	16	20	6
Элементы теории вероятностей и математической статистики Вероятность и ее свойства, повторные испытания, случайная величина, беседа «Происхождение теории вероятностей»	12	14	12	12	12
Уравнения и неравенства Равносильность уравнений, основные приемы решения уравнений, системы уравнений, решение неравенств, беседа «Разрешимость алгебраических уравнений»	20	20	32	32	12
Резерв учебного времени	19	8	12	25	7

МЕТОДИЧЕСКИЙ КОММЕНТАРИЙ ПО ГЛАВАМ

ГЛАВА 1

РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ

Содержание темы

Целые и рациональные числа. Действительные числа. Приближенные вычисления. *Приближенное значение величины и погрешности приближений. Комплексные числа.*

Требования к результатам обучения

В результате освоения данной темы обучающийся должен *уметь*: выполнять арифметические действия над числами, сочетая устные и письменные приемы; находить приближенные значения величин и погрешности вычислений (абсолютная и относительная); сравнивать числовые выражения.

Примерное поурочное планирование

Содержание темы	Количество часов на тему (вариант программы)				
	12 (1)	10 (2)	16 (3)	20 (4)	6 (5)
Целые и рациональные числа	2	2	4	5	2
Действительные числа	2	2	2	2	1
Приближенные вычисления	4	2	4	4	2
Комплексные числа	2	2	3	5	—
Беседы	—	—	1	1	—
Контроль усвоения	2	2	2	3	1

Раздел «Целые и рациональные числа» является в основном повторительным. В вариантах программы 1, 2 и 5 можно ограничиться действиями над рациональными числами, проверить умения работать с обыкновенными и десятичными дробями. В вариантах 3 и 4 следует добавить вопросы по теории чисел — разложение на простые множители, нахождение НОД и НОК.

В разделе «Действительные числа» по всем программам можно ограничиться практикой разложения чисел в бесконечные десятичные дроби и беседой исторического характера.

Раздел «Приближенные вычисления» является центральным разделом темы. Он имеет большое прикладное значение и в то же время оказывается плохо усвоенным в основной школе. Следует повторить стандартную запись числа, понятия порядка числа и его мантиссы. Для проведения вычислений можно применять калькулятор. Рекомендуется использовать тренажеры 1.12—1.16 (из задачника) для отработки понятия «относительная погрешность».

Раздел «Комплексные числа» содержит новый для обучающихся материал, предназначенный в основном для ознакомления. При прохождении раздела важно остановиться на геометрическом смысле комплексных чисел и действий над ними.

Рекомендации по подготовке к контрольной работе

■ Арифметические действия над рациональными числами

Повторить различные формы записи числа, переход от рациональной дроби к десятичной записи и наоборот. Предложить пример.

Вычислить $\dfrac{0{,}725+0{,}6+\dfrac{7}{40}+\dfrac{11}{20}}{0{,}128\cdot 6\dfrac{1}{4}-0{,}0345:\dfrac{3}{25}}\cdot 0{,}25.$

Обсудить выполнение отдельных действий:

1) $\dfrac{7}{40}+\dfrac{11}{20}=\dfrac{7+22}{40}=\dfrac{29}{40}$; можно представить десятичной дробью: $\dfrac{29}{40}=0{,}725.$

Можно сначала исходные обыкновенные дроби перевести в десятичные: $\dfrac{7}{40}=0{,}175$; $\dfrac{11}{20}=0{,}55$; тогда $0{,}175+0{,}55=0{,}725$.

Теперь видны два одинаковых слагаемых. Сложение можно выполнить устно: $0{,}725+0{,}6+0{,}725=2\cdot 0{,}725+0{,}6=1{,}45+$ $+0{,}6=2{,}05$.

Полученное число можно записать неправильной дробью: $2{,}05=2+\dfrac{1}{20}=\dfrac{41}{20}$.

2) $0{,}0345:\dfrac{3}{25}=0{,}0345:0{,}12=3{,}45:12=1{,}15:4=0{,}2875$, или $\dfrac{345}{10\,000}:\dfrac{3}{25}=\dfrac{3\cdot 5\cdot 23\cdot 25}{2^4\cdot 5^4\cdot 3}=\dfrac{23}{2^4\cdot 5}=\dfrac{23}{80}$; $0{,}128\cdot 6\dfrac{1}{4}=\dfrac{128\cdot 25}{1000\cdot 4}=\dfrac{2^7\cdot 5^2}{2^5\cdot 5^3}=\dfrac{4}{5}$.

Видно, что в знаменателе выгоднее вычислять в обыкновенных дробях:

$\dfrac{4}{5}-\dfrac{23}{80}=\dfrac{64-23}{80}=\dfrac{41}{80}$.

Поделив числитель на знаменатель: $\dfrac{41}{20}:\dfrac{41}{80}=4$, окончательно имеем $4\cdot 0{,}25=1$. *Ответ*: 1.

Следует обсудить выбор порядка и способа вычислений.

■ Стандартная запись числа

Сформулировать способ перевода числа в стандартную запись.

29 500 = $2{,}95 \cdot 10^4$ — показатель 4 — число цифр после первой;

$0{,}00724 = 7{,}24 \cdot 10^{-3}$ — показатель –3 — число цифр после нуля по первую значащую (с минусом).

Предложить примеры двух типов для тренировки:

1) 673 000 = $6{,}73 \cdot 10^5$;

2) $0{,}245 = 2{,}45 \cdot 10^{-1}$.

■ Округление чисел

Повторить правило округления и провести тренировку.

Округлить числа с заданной точностью:

1) 10^{-2}; $2{,}6789 \approx 2{,}68$;

2) 10^3; $5\,879{,}1 \approx 6\,000$.

Предложить вычислить произведение с заданной точностью 10^{-2}: $A = 3{,}7541 \cdot 12{,}0386$.

Разрешить использовать калькулятор.

$A = 45{,}194108... \approx 45{,}19$.

Затем предложить сначала округлить числа с различной точностью (заданной и большей) и после этого перемножить:

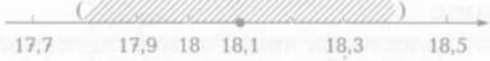
1) 10^{-2}; $3{,}75 \cdot 12{,}04 = 45{,}1500 \approx 45{,}15$;

2) 10^{-3}; $3{,}754 \cdot 12{,}039 = 45{,}194406 \approx 45{,}19$.

Из этих вычислений ясно, что для получения произведения с некоторой точностью нельзя брать множители с той же точностью. Приходится их брать с большей точностью.

■ Абсолютная и относительная погрешность

Обсудить, какой следует изобразить участок числовой оси и в каком масштабе.



$$|q - 18{,}1| < 0{,}3;$$
$$q \in (17{,}8;\ 18{,}4).$$

Действия над комплексными числами и их геометрическая интерпретация

Даны числа $z_1 = 3 - i$, $z_2 = -1 + 2i$.

Вычислить $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

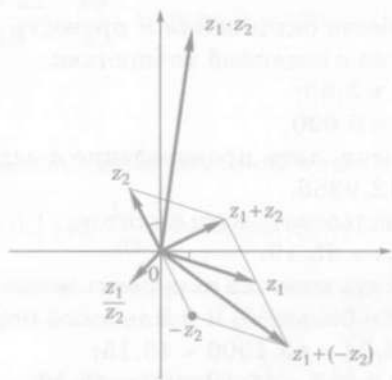
Изобразить результаты вычислений на комплексной плоскости.

$z_1 + z_2 = (3 - i) + (-1 + 2i) = 2 + i$ — устно;

$z_1 - z_2 = (3 - i) - (-1 + 2i) = 4 - 3i$ — устно;

$z_1 \cdot z_2 = (3 - i)\cdot(-1 + 2i) = (3\cdot(-1) - (-1)\cdot 2) + i(3\cdot 2 + (-1)\cdot(-1)) = -1 + 7i$ — повторить формулу $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)\cdot i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-i}{-1+2i} = \frac{(3-i)(-1-2i)}{(-1)^2+2^2} = \frac{-5-5i}{5} = -1-i.$$



Все вычисления изобразить на одном чертеже.

По чертежу найти равные углы между векторами.

Рекомендации по решению задач

Делимость, остатки

1.9. Укажите остаток при делении: а) на 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 8; е) 9; ж) 10; з) 11.

Указание. При выполнении задания воспользуемся следующими правилами:

1) остаток от деления на число m меньше самого числа m;

2) остаток от деления на числа 3 и 9 равен остатку от деления суммы цифр числа на 3, 9;

3) остаток от деления суммы (произведения) на число равен сумме (произведению) остатков слагаемых (множителей) на это число;

4) число делится на 4, если число, образованное двумя его последними цифрами, делится на 4 (на 8 — тремя последними цифрами);

5) число делится на 11, если знакопеременная сумма его цифр делится на 11 (последняя цифра берется со знаком «+») или сумма цифр, занимающих нечетные места, отличается от суммы цифр на четных местах на число, кратное 11.

Рассмотрим решение примера № 1.9 Б 1), 3).

Число	Делитель	Решение	Остаток
1) 1 359 216	а) 2	Число четное	0
	б) 3	Сумма цифр ($1 + 3 + 5 + 9 + 2 + 1 + 6 = 27$) кратна 3	0
	в) 4	Две последние цифры числа кратны 4	0
	г) 5	Число 1 359 215 кратно 5 и отличается от данного на 1	1
	д) 8	Число $216 = 160 + 56$ делится на 8	0
	е) 9	Сумма цифр 27 кратна 9	0
	ж) 10	Число 1 359 210 кратно 10 и отличается от данного на 6	6
	з) 11	Составляем знакопеременную сумму $6 - 1 + 2 - 9 + 5 - 3 + 1 = 1$. Число 1 359 215 делится на 11, отличается от данного на 1	1
3) 5^{20}	а) 2	5^{20} — нечетное число	1
	б) 3	$5^{20} = 25^{10}$. Каждый множитель при делении на 3 дает остаток 1. Произведение остатков множителей равно 1	1
	в) 4	Две последние цифры 25. При делении на 4 дают остаток 1	1

Число	Делитель	Решение	Остаток
	г) 5	Очевидно	0
	д) 8	$5^{20} = 25^{10}$. Аналогично б)	1
	е) 9	$5^{20} = 25^{10}$. Остаток при делении 25 на 9 равен 7. Произведение остатков $7^{10} = 49^5$ делим на 9, получаем произведение остатков $4^5 = 2^{10} = 1\,024$. Сумма цифр $1 + 0 + 2 + 4 = 7$ при делении на 9 дает остаток 7	7
	ж) 10	Очевидно	5
	з) 11	$5^{20} = 625^5$. При делении 625 на 11 остаток 9. Произведение остатков $9^5 = 9^3 \cdot 81 = 729 \cdot 81$; 729:11 — остаток 3; 81:11 — остаток 4. Произведение остатков 12, при делении на 11 дает остаток 1	1

Системы счисления

Б

1.11. Переведите число из одной системы счисления в другую.

1) 1 359 — из десятичной в двоичную.

Решение. Число представляем в виде суммы степеней числа 2: $2^{10} < 1\,359 < 2^{11}$.

$2^{10} = 1\,024$, $2^9 = 512$, $2^8 = 256$, $2^7 = 128$ и т. д.

$1\,359 = 1\,024 + 128 + 4 + 2 + 1 = 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

Число в двоичной системе составлено из коэффициентов разложения по 2^n. Выписываем коэффициенты. Искомое число — 10010000111.

2) 1010101 — из двоичной в десятичную.

Решение. $1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 = 85$.

Ответ: 85.

3) 0,1 — из двоичной в десятичную.

Решение. Раскладываем в сумму по степеням 2^n.

$0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

1.16. Найдите относительную погрешность (в процентах) следующих измерений; проценты вычислите с точностью до 0,1.

Указание. Для нахождения относительной погрешности в процентах делим абсолютную погрешность на приближенное значение измеряемой величины и умножаем на 100.

В некоторых задачах значащей цифрой в относительной погрешности является третья или четвертая цифра после запятой, поэтому мы увеличили точность до 0,01; 0,001 и т. д.

А

1) $A = 240 \pm 1$.

Решение. Относительная погрешность равна

$$\frac{1}{240} \cdot 100\,\% \approx 0{,}4\,\%.$$

Ответ: 0,4 %.

2) Радиус Земли (в км): $R = 6\,380 \pm 1$.

Решение. Решается аналогично.

Ответ: 0,02 %.

Б

1) Скорость света (в км/с): $|c - 2{,}998 \cdot 10^5| < 100$.

Ответ: 0,03 %.

2) Диаметр Луны (в км): $d = 3\,476 \pm 1$.

Ответ: 0,03 %.

В

1) Масса Земли (в кг): $m = 5{,}976 \cdot 10^{24}$ (все цифры верные).

Решение. Так как все цифры у мантиссы верные, то за абсолютную погрешность мантиссы принимают половину следующего разряда, т. е. 0,0005, или $5 \cdot 10^{-4}$ (порядок остается тот же), следовательно, относительная погрешность в процентах равна

$$\frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 100}{5{,}976} = 0{,}008\,\%.$$

Ответ: 0,008 %.

2) Диаметр Солнца (в км): $d = 1{,}392 \cdot 10^6$ (все цифры верные). Решение аналогично.

Ответ: 0,04 %.

■ Комплексные числа

Указание. Во всех следующих задачах важно помнить, что $|z - z_0|$ — это расстояние между точками z и z_0, а комплексное число $a + bi$ изображается точкой с координатами (a, b).

1.18. Изобразите множество точек.

А

1) $|z - i| < 1$.

Решение. Условие можно прочитать так: изобразите множество точек, расстояние которых от точки (0; 1) не превосходит 1. Понятно, что это круг радиусом 1.

Ответ: круг радиусом 1 с центром в точке (0; 1).

2) $|z - i| = |z + 4|$.

Решение. Условие можно прочитать так: изобразить множество точек, равноудаленных от точек (0; 1) и (–4; 0). Очевидно, что это прямая, проходящая через середину отрезка, соединяющего точки (0; 1) и (–4; 0), перпендикулярно этому отрезку.

3) $|z| = 2$.

Аналогична первой задаче.

Ответ: окружность радиусом 2 с центром в начале координат.

Б

1) $|z - 2 + i| \geq 4$.

Решение. Перепишем условие так: $|z - (2 - i)| \geq 4$. Теперь очевидно, что это внешность круга радиусом 4 с центром в точке (2; –1).

Ответ: круг радиусом 4 с центром в точке (2; –1).

2) $\dfrac{|z-i|}{|z+i|} = 1$.

Решение. Заметим, что $z \neq -i$. Перепишем уравнение $\dfrac{|z-i|}{|z+i|} = 1$ так: $|z - i| = |z + i|$. Получили уравнение прямой, равноудаленной от точек (0; 1) и (0; –1), т. е. ось абсцисс.

3) $|z| \le |z+1|$.

Решение. Если бы в условии было равенство, то это была бы прямая, равноудаленная от точек (0; 0) и (–1; 0). Неравенство означает, что это точки, расположенные ближе к точке (0; 0), а тогда это полуплоскость, расположенная справа от прямой $x = -0,5$.

В

1) $\left|\dfrac{z-3}{z+5}\right| \le 2$.

Решение. Положим $z = x + iy$ и приведем к общему знаменателю, тогда получим $|x + iy - 3| \le 2|x + iy + 5|$. Так как геометрическая интерпретация неравенства здесь не очевидна, то вычислим модули справа и слева: $\sqrt{(x-3)^2+y^2} \le 2\sqrt{(x+5)^2+y^2} \Rightarrow (x-3)^2 + y^2 \le 4((x+5)^2+y^2)$.

Раскрываем скобки, приводим подобные члены:

$3x^2 + 3y^2 + 46x + 91 \ge 0 \Leftrightarrow$

$$x^2+\frac{46}{3}x+\left(\frac{23}{3}\right)^2+y^2 \ge \left(\frac{23}{3}\right)^2-\frac{91}{3} \Leftrightarrow \left(x+\frac{23}{3}\right)^2+y^2 \ge \frac{256}{9}.$$

Таким образом, точки заполняют внешность круга радиусом $\dfrac{16}{3}$ с центром в точке $\left(-\dfrac{23}{3};0\right)$.

2) $-i|z-4| = \dfrac{2}{i}$.

Решение. Умножим левую и правую часть на i, тогда получим $|z-4| = 2$ — окружность радиусом 2 с центром в точке (4; 0).

3) $|z-1| + |z+i| \le 1$.

Решение. Таких точек не существует, так как самое маленькое значение выражения получится, если точки находятся на отрезке, соединяющем точки (–1; 0) и (0; –1), а оно равно $\sqrt{2}$.

1.23.

Б

1) Разложите в произведение степеней простых чисел $2^{12} - 1$.
Указание. Разложите разность квадратов.
Ответ: $3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$.

1.24.

В

Указание. Эта работа может быть предложена обучающимся, проявившим повышенный интерес к математике. Дополнительную сложность представляет проверка, что полученные большие множители являются простыми числами.

Вариант 1

(1...1 (единица повторяется 12 раз); 1...1 (единица повторяется 14 раз)).

111 111 111 111 = 111 000 000 000 + 111 000 000 + 111 000 + + 111 = $111\ (10^9 + 10^6 + 10^3 + 1) = 111\ ((10^9 + 1) + (10^6 + 10^3)) = 111\ ((10^3 + 1)(10^6 - 10^3 + 1) + 10^3(10^3 + 1)) = 111\ (10^3 + 1)(10^6 + 1) = 3\cdot37\cdot11\cdot91\cdot101\cdot9901$.

Ответ: $3\cdot11\cdot37\cdot91\cdot101\cdot9\,901$.

Указание. Аналогично решается вторая задача, только в ней выносится множитель 11, а затем степени 10 объединяются таким образом, чтобы появился общий множитель, и т. д.

Ответ: $3^2\cdot11\cdot239\cdot4\,649\cdot909\,091$.

Вариант 2

(1...1 (единица повторяется 12 раз); 1...1 (единица повторяется 15 раз)).

Ответ: $3\cdot31\cdot37\cdot41\cdot271\cdot2\,906\,161$.

1.41. Остаток от деления числа 13 579 203 на 11 равен

а	б	в	г
3	0	6	8

Решение. Проверяем знакопеременную сумму цифр $3 - 0 + 2 - 9 + 7 - 5 + 3 - 1 = 0$.

Ответ: 0.

1.42. Максимальная степень 4, на которую делится 6 656, равна

а	б	в	г
12	3	4	5

Решение. $4 = 2^2$, $2^{10} = 1\,024$, $1\,024\cdot4 = 2^{10}\cdot2^2 = 4\,096 < 6\,656$, $2^{13} > 6\,656$.

Ответ: 12.

ГЛАВА 2

КОРНИ, СТЕПЕНИ И ЛОГАРИФМЫ

Содержание темы

Корни и степени. Корни натуральной степени из числа и их свойства. Степени с рациональными показателями, их свойства. Степени с действительными показателями. *Свойства степени с действительным показателем.*

Логарифм. Логарифм числа. *Основное логарифмическое тождество.* Десятичные и натуральные логарифмы. Правила действий с логарифмами. *Переход к новому основанию.*

Преобразование алгебраических выражений. Преобразование рациональных, иррациональных, степенных, показательных и логарифмических выражений.

Требования к результатам обучения

В результате освоения данной темы обучающийся должен *уметь*:

- находить значение корня, степени, логарифма на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
- выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

- для практических расчетов по формулам, включая формулы, содержащие степени, радикалы и логарифмы, применяя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства.

Примерное поурочное планирование

Содержание темы	Количество часов на тему (вариант программы)				
	32 (1)	16 (2)	36 (6)	38 (8)	12 (2)
Повторение материала основной школы	3	2	3	3	2

Окончание таблицы

Содержание темы	Количество часов на тему (вариант программы)				
	32 (1)	16 (2)	36 (6)	38 (8)	12 (2)
Корень n-й степени	4	2	4	4	1
Степени	4	2	5	5	1
Логарифмы	4	2	5	5	2
Функции	5	3	6	6	2
Уравнения и неравенства	5	3	6	7	2
Беседа	1	—	1	1	—
Контроль усвоения	4	2	4	5	2
Выполнение проекта	2	—	2	2	—

Тема «Корни, степени и логарифмы» имеет длинную историю развития. Начиная с квадрата и куба, с которыми обучающийся знакомится в начале основной школы, постепенно происходит понимание связи между значениями букв a, b и c в записи $a^b = c$, формирование умения оперировать с выражениями и функциями, использующими для своего задания корни, степени и логарифмы.

Отметим важнейшие итоговые пункты.

1. Для каких значений a, b и c мы используем запись $a^b = c$? Этот вопрос подразумевает, в частности, построение степени положительного основания a с произвольным показателем b.

2. Возможность построения трех операций, основанных на равенстве $a^b = c$: нахождение c по заданным a и b (возведение в степень), нахождение a по заданным b и c (операция, обратная к предыдущей, «извлечение корня», которая тоже сводится к возведению в некоторую степень), нахождение b по заданным a и c (нахождение логарифма).

3. Алгебраическая техника — преобразования выражений, использующих указанные операции.

4. Функциональная техника — изучение стандартных функций, определение которых использует указанные операции.

5. Решение уравнений и неравенств, содержащих показательные и логарифмические выражения.

6. Ознакомление с важными прикладными задачами, связанными с корнями, степенями и логарифмами.

Структура теоретического текста достаточно ясна, что позволит фактически завершить линию, добившись осознания шести указанных ее итоговых пунктов, формирования умений работы со степенями, корнями и логарифмами на определенном уровне, приобретение опыта решения прикладных задач.

Значительным резервом уменьшения учебной нагрузки при прохождении темы является отказ от использования логарифмов по произвольному основанию, сосредоточив внимание на десятичных и двоичных логарифмах (а впоследствии и на натуральных). Этот подход должен сопровождаться твердым усвоением принципиального факта — переход от одного основания степени к другому сопровождается пропорциональным изменением показателя ($a^x = 2^{kx}$ или $a^x = 10^{kx}$), а для логарифмов — пропорциональность значений ($\log_a x = k\log_2 x$ или $\log_a x = k\lg x$).

Например, запись решения уравнения $3^x = 5$ в виде $x = \log_3 5$ является малоосмысленной тавтологией — оба равенства указывают лишь на то, что x является показателем степени, в которую нужно возвести 3, чтобы получить 5. Запись ответа в виде $x = \dfrac{\lg 5}{\lg 3}$ гораздо более содержательна, потому что при регулярной работе с десятичными логарифмами записи lg5, lg3 уже понимаются не формально, а как имена знакомых чисел, что позволяет более осознать полученный ответ и применять его (например, найти приближенное значение x).

Рекомендации по подготовке к контрольной работе

■ Вычисления

а) *Корни*

Повторить преобразования радикалов:

$$\sqrt{750} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5^3} = 5\sqrt{30};\ \sqrt{10} = \sqrt[6]{10^3};\ \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{72}.$$

Вычислить: $\dfrac{\sqrt{10} \cdot \sqrt[6]{343}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{250}} = \dfrac{\sqrt{10} \cdot \sqrt[6]{7^3}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{2 \cdot 5^3}} = \dfrac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot 5\sqrt{10}} = \dfrac{1}{5}.$

б) *Степени*

Потренироваться в освобождении от отрицательных степеней:

$$2^{-2} = \frac{1}{4};\ (0{,}5)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4;\ \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8.$$

Вычислить: $\dfrac{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^6 \cdot 2^{-4}}{3^{-2}} = \dfrac{3^{\frac{2}{3}\cdot 6} \cdot 3^2}{2^4} = \dfrac{3^4 \cdot 3^2}{2^4} = \dfrac{3^6}{2^4} = \dfrac{729}{16}.$

в) *Логарифмы*

Повторить основное логарифмическое тождество и связь между логарифмами по основаниям a и a^k ($\log_{a^k} x = \frac{1}{k}\log_a x$).

$(81)^{\log_3 2} = 3^{4\log_3 2} = (3^{\log_3 2})^4 = 2^4 = 16;$

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_{\frac{1}{4}} x + \log_{\sqrt{2}} x =$$

$$= \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{(-2)}\log_2 x + 2\log_2 x = 3\log_2 x.$$

Вычислить:

$$\log_{\sqrt{3}} 27 + \log_{\frac{1}{3}} 9 - 4\log_3^2 \sqrt{3} = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^3 + \log_{3^{-1}} 3^2 - 4\log_3^2 3^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\log_3 3^3 - \log_3 3^2 - 4\left(\log_3 3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 6 - 2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 - 2 - 1 = 3.$$

■ Монотонность степенных, показательных и логарифмических функций

Повторить, как находится область значений функций, определенных и монотонных на некотором конечном промежутке.

Найти наибольшее значение M функций на отрезке $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$:

а) $y = \frac{1}{3}x^{-1}$; функция убывает на заданном отрезке, принимает наибольшее значение M на левом конце:

$M = y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 1;$

б) $y = \left(\frac{8}{27}\right)^x$; так как $\frac{8}{27} < 1$, то функция $y = \left(\frac{8}{27}\right)^x$ убывает и принимает наибольшее значение M на левом конце:

$$M = y\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3\cdot\frac{1}{3}} = \frac{2}{3};$$

в) $y = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{x}$. Переписываем: $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{x} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \log_3 x = \log_3 x$.

Так как функция $y = \log_3 x$ возрастает на заданном отрезке, то наибольшее значение M она принимает на правом конце: $M = y(3) = \log_3 3 = 1$.

■ Область определения логарифмической функции

1) Сравнить области определения функций $y = \lg(x - 2) + \lg(x + 3)$ и $y = \lg((x - 2)(x + 3)) = \lg(x^2 + x - 6)$: в первом случае область определения — интервал $(2; +\infty)$, во втором — объединение двух интервалов: $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

2) Найти область определения функции $y = \lg(x^2 + x - 6) + \lg(x + 5)$.

Наносим на числовую ось корни выражений под знаком логарифма и находим общую часть:

Ответ: $(-5; -3) \cup (2; +\infty)$.

■ Показательные уравнения и неравенства

1) Тренировка в устном решении стандартных показательных уравнений и неравенств:

а) $3^x = \frac{1}{9}$; $\frac{1}{9} = 3^{-2} \Rightarrow x = -2$;

б) $4^x = \frac{1}{2}$; $2^{2x} = 2^{-1} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$;

в) $10^x \le 0{,}1$; $0{,}1 = 10^{-1} \Rightarrow x \le -1$;

г) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \ge 8$; $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 2^{-2x}$; $8 = 2^3 \Rightarrow x \le -\frac{3}{2}$.

2) Решить показательные уравнения и неравенства:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1-x} = 1\frac{1}{2}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow x - 1 = 1$; $x = 2$;

б) $2^{x+1} = \frac{1}{64}$; $x + 1 = -6$; $x = -7$;

в) $2^{x+1} + \frac{2}{2^x} = \frac{17}{2}$ $[2^x = t]$; $2t + \frac{2}{t} = \frac{17}{2}$; $4t^2 - 17t + 4 = 0 \Rightarrow$

$t_1 = 4$; $t_2 = \frac{1}{4}$; $2^x = 4$, $x_1 = 2$; $2^x = \frac{1}{4}$, $x_2 = -2$;

г) $\frac{9}{\sqrt{3}} \geq 729^{\frac{1}{3}-x}$;

$3^{2-\frac{1}{2}} \geq 3^{6\left(\frac{1}{3}-x\right)}$; $3^{\frac{3}{2}} \geq 3^2 \cdot 3^{-6x}$; $3^{-\frac{1}{2}} \geq 3^{-6x}$; $-\frac{1}{2} \geq -6x$; $x \geq \frac{1}{12}$.

■ Логарифмические уравнения и неравенства

1) Тренировка в устном решении стандартных логарифмических уравнений и неравенств:

а) $\log_3(x + 1) = -2$; $-2 = \log_3 \frac{1}{9}$; $x + 1 = \frac{1}{9}$; $x = -\frac{8}{9}$;

б) $\log_2 \sqrt{x} = \log_4(4x - 1)$; $\log_4(4x-1) = \frac{\log_2(4x-1)}{2}$;

$x = 4x - 1$, $x = \frac{1}{3}$ (проверить, что входит в ОДЗ);

в) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \geq -1$; $0 < 2x - 1 \leq 2$; $\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}$.

2) Решить логарифмические уравнения и неравенства:
а) $\log_2(x + 3) + \log_2(x - 1) = 2 + \log_2 3$;
$x^2 + 2x - 3 = 12$; $x^2 + 2x - 15 = 0$;
$x_1 = -5$; $x_2 = 3$; проверяем ОДЗ: $x = -5$ не входит в ОДЗ.
Ответ: $x = 3$.

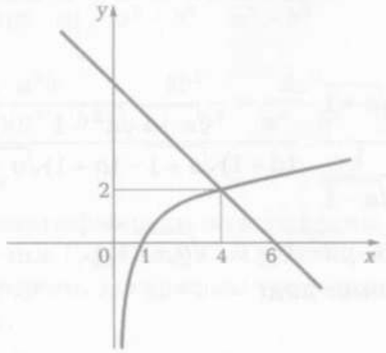
б) $\log_3(x - 1) + \log_9(x - 1) \leq -\frac{9}{2}$;

$\frac{3}{2}\log_3(x-1) \leq -\frac{9}{2}$; $\log_3(x - 1) \leq -3$;

$0 < x - 1 \leq \frac{1}{27}$; $x \in \left(1; \frac{28}{27}\right]$

в) $\log_2 x \geq 6 - x$.

Решаем графически:



Ответ: $x \geq 4$.

Рекомендации по решению задач

Тема «Корни, степени и логарифмы» традиционно снабжена большим количеством упражнений репродуктивного характера. Приводим указания к решениям менее стандартных задач из задачника.

■ Вычисление значений выражений

1) Обратим внимание на примеры, в которых числовое значение имеет смысл заменить на буквенное, упростить его, а затем вернуться к числовому.

2.1.

B

11) Вычислите значение выражения $\dfrac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \dfrac{\log_2 9}{\log_{72} 2}$.

Решение. $\dfrac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \dfrac{\log_2 9}{\log_{72} 2} = \log_2 18 \cdot \log_2 36 - \log_2 9 \cdot \log_2 72$. Обозначим $\log_2 9 = a$, тогда получим: $(a + 1)(a + 2) - a(a + 3) = a^2 + 3a + 2 - a^2 - 3a = 2$.

2) При упрощении выражений иногда бывает удобно ввести замену некоторого выражения другими буквами.

2.5. Упростите выражение.

Б

7) $1-\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}}:\dfrac{\sqrt{a+1}\sqrt{a^2-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}$, $a>1$.

Решение. Пусть $\sqrt{a-1}=p$, $\sqrt{a+1}=q$.

Выражение примет вид:

$$1-\frac{\frac{1}{p}-q}{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}:\frac{q\cdot pq}{p^2\cdot q-q^2p}=1-\frac{(1-pq)qp}{(p-q)p}:\frac{pq^2}{pq(p-q)}=$$

$$=1-\frac{(1-pq)\cdot pq^2\cdot(p-q)}{(p-q)\cdot pq^2}=1-(1-pq)=pq.$$

Возвращаясь к старым обозначениям, получим $\sqrt{a^2-1}$.

13) $\dfrac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\left(3^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{2}{3}}-6^{\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}\right)}$.

Решение. Пусть $\sqrt[3]{3}=a$, $\sqrt[3]{2}=b$.

Получим: $\dfrac{a-b}{(a^2+b^2-ab)(a^2-b^2)}=\dfrac{1}{(a^2+b^2-ab)(a+b)}=\dfrac{1}{a^3+b^3}$,

т.е. значение данного выражения равно $\dfrac{1}{3+2}=\dfrac{1}{5}=0{,}2$.

В

3) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{xy^{\frac{1}{2}}-yx^{\frac{1}{2}}}\right)\dfrac{x\sqrt{x}y^{\frac{1}{2}}}{x+y}-\dfrac{2y}{x-y}$.

Решение. Пусть $\sqrt{x}=a$, $\sqrt{y}=b$.

Данное выражение примет вид:

$$\left(\frac{a-b}{a^2b+b^2a}+\frac{a+b}{a^2b-b^2a}\right)\cdot\frac{a^3b}{a^2+b^2}-\frac{2b^2}{a^2-b^2}=$$

$$= \left(\frac{a-b}{ab(a+b)} + \frac{a+b}{ab(a-b)}\right) \cdot \frac{a^3b}{a^2+b^2} - \frac{2b^2}{a^2-b^2} =$$

$$= \frac{2(a^2+b^2)\cdot a^3b}{ab(a+b)(a-b)(a^2+b^2)} - \frac{2b^2}{a^2-b^2} = \frac{2a^2}{a^2-b^2} - \frac{2b^2}{a^2-b^2} = 2.$$

15) $3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3}$.

Решение. Прологарифмируем по основанию 5 первое и второе выражения: получим $\log_5 7 \log_5 3$ — для первого выражения и то же самое для второго, логарифмы совпадают, следовательно, выражения равны.

Ответ: 0.

Сравнение значения выражения

2.6. Сравните значения выражений.

А

18) $\lg 9{,}5^2$ и $\lg^2 9{,}5$.

Решение. Обозначим $\lg 9{,}5 = a$, $0 < a < 1$, т.е. это десятичная дробь вида 0,... .

Сравниваем $2a$ и a^2. Разность $2a - a^2 = a(2 - a)$ больше нуля. Значит, $\lg 9{,}5^2 > \lg^2 9{,}5$.

Замечание: это решение справедливо для всех чисел $0 < a < 10$.

20) $299 \cdot 301$ и 300^2.

Решение. Пусть $300 = a$, тогда нужно сравнить $(a - 1)(a + 1)$ и a^2. Первое выражение на 1 меньше второго: $299 \cdot 301 < 300^2$.

2) Приведем решения нескольких интересных примеров на сравнение значений выражений.

Б

4) $296^3 - 214^3$ и $(296 - 214)^3$.

Решение. $296 = a$, $214 = b$, $a > b > 0$.

$a^3 - b^3 = (a - b)((a - b)^2 + 3ab) = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$, так как $3ab\,(a - b) > 0$, ответ очевиден.

Ответ: $296^3 - 214^3 > (296 - 214)^3$.

7) 28^{16} и 79^{12}.

Решение. $28^{16} = (28^4)^4$, $79^{12} = (79^3)^4$. Сравниваем 28^4 и 79^3. Заменим 79^3 на 80^3 и сравним $28^4 = 4^4 \cdot 7^4$ и $80^3 = 4^6 \cdot 5^3$ или 7^4 и $4^2 \cdot 5^3$. $7^4 > 2\,000$, $4^2 \cdot 5^3 = 2\,000$. Таким образом, $28^4 > 80^3 > 79^3$.

Ответ: $28^4 > 79^3$.

8) $1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \dots 10^{10}$ и 10^{55}.

Решение. Если каждое число заменить на 10, то получим $1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 10^{10} < 10 \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot \dots \cdot 10^{10} = 10^{1+2+3+\dots+10} = 10^{55}$.

Ответ: $1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 10^{10} < 10^{55}$.

9) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ и $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Решение. Запишем степени в виде корней степени 12.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3}} = \sqrt[12]{\frac{1}{27}}; \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[12]{\frac{1}{256}}.$$

Теперь очевидно, что первое число больше второго.

Ответ: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$.

В

4) $\sqrt[12]{623}$ и $\sqrt[3]{5}$.

Решение. $\sqrt[12]{623} < \sqrt[12]{625} = \sqrt[3]{5}$.

Ответ: $\sqrt[12]{623} < \sqrt[3]{5}$.

6) $\sqrt{7} + \sqrt{15}$ и 7.

Решение. $\sqrt{7} = 2,\dots < 3$; $\sqrt{15} = 3,\dots < 4$. Их сумма меньше 7.

Ответ: $\sqrt{7} + \sqrt{15} < 7$.

8) $\sqrt{12} - \sqrt{11}$ и $\sqrt{11} - \sqrt{10}$.

Решение. Умножим оба выражения на сопряженные:

$(\sqrt{12} - \sqrt{11})(\sqrt{12} + \sqrt{11})(\sqrt{11} + \sqrt{10})$ и

$(\sqrt{11} - \sqrt{10})(\sqrt{11} + \sqrt{10})(\sqrt{12} + \sqrt{11})$.

Произведение первых двух скобок равно 1. Осталось сравнить $\sqrt{11} + \sqrt{10}$ и $\sqrt{12} + \sqrt{11}$.

Ответ: $\sqrt{12} - \sqrt{11} < \sqrt{11} - \sqrt{10}$.

9) $\sqrt[30]{1} + \sqrt[4]{2}$ и 2.

Решение. $\sqrt[30]{1}=1,\ \sqrt[4]{2}>1.$

Ответ: $\sqrt[30]{1}+\sqrt[4]{2}>2.$

11) $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}$ и $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}$.

Решение. $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}=\log_2 3>1,\ \log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}=\log_3 2,\ 0<\log_2 3<1;$

$\log_3 2=\dfrac{1}{\log_2 3}\Rightarrow \log_3 2<1.$

Ответ: $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}>\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}$.

12) $(\log_2 5)^2$ и $\log_2 20$.

Решение. $\log_2 20=2+\log_2 5$. Обозначим: $\log_2 5=a>2$. Сравниваем a^2 и $a+2$.

Оценим разность: $a^2-a-2=(a-2)(a+1)>0$, значит, первое число больше второго.

Ответ: $(\log_2 5)^2>\log_2 20$.

13) $\log_\pi 2+\log_2\pi$ и 2.

Решение. $\log_\pi 2=\dfrac{1}{\log_2\pi}$. Обозначим $\log_2\pi=a,\ a>1$.

Сравниваем $\dfrac{1}{a}+a$ и 2. Известно, что значение выражения $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$ при положительных a. Равенство достигается при $a=1$. У нас $a>1$. Отсюда первое число больше второго.

Ответ: $\log_\pi 2+\log_2\pi>2$.

14) $\log_3 10+4\lg 3$ и 4.

Решение. $\log_3 10=\dfrac{1}{\lg 3}$. Пусть $\lg 3=a,\ 0<a<1$.

Сравниваем: $\dfrac{1}{a}+4a$ и 4.

Оценим разность: $\dfrac{1}{a}+4a-4=\dfrac{4a^2-4a+1}{a}=\dfrac{(2a-1)^2}{a}>0$, значит, первое число больше второго.

Ответ: $\log_3 10+4\lg 3>4$.

15) $3^{\log_8 2}$ и $2^{\log_8 3}$.

Решение. Прологарифмируем оба выражения по основанию 8: $\log_8 2\ \log_8 3$ и $\log_8 3\ \log_8 2$. Логарифмы равны, следовательно, и выражения равны.

Ответ: $3^{\log_8 2} = 2^{\log_8 3}$.

16) $10^{\log_9 3}$ и $7^{\log_4 2}$.

Решение. $\log_9 3 = \frac{1}{2}$, $\log_4 2 = \frac{1}{2}$.

Сравниваем: $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ и $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$. Очевидно, первое число больше второго.

Ответ: $10^{\log_9 3} > 7^{\log_4 2}$.

17) $2^{\sqrt{\log_2 3}}$ и $3^{\sqrt{\log_3 2}}$.

Решение. Заметим, что $\log_2 3 \cdot \log_3 2 = 1$. Прологарифмируем по основанию 2 и сравним $\sqrt{\log_2 3}$ и $\sqrt{\log_3 2}\log_2 3 = \sqrt{\log_2 3}$. Логарифмы равны, следовательно, и сами выражения равны.

Ответ: $2^{\sqrt{\log_2 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 2}}$.

19) $\log_{20} 80$ и $\log_{80} 640$.

Решение. Заменим данные логарифмы на десятичные и обозначим $\lg 2 = a > 0$.

$$\log_{20} 80 = \frac{1+3\lg 2}{1+\lg 2},\ \log_{80} 640 = \frac{1+6\lg 2}{1+3\lg 2}.$$

Рассмотрим разность:

$$\frac{1+3a}{1+a} - \frac{1+6a}{1+3a} = \frac{(1+3a)^2-(1+a)(1+6a)}{(1+a)(1+3a)} = \frac{a(3a-1)}{(1+a)(1+3a)} < 0,$$ так как $3a - 1 = 3\lg 2 - \lg 10 = \lg 8 - \lg 10 < 0$.

Ответ: $\log_{20} 80 < \log_{80} 640$.

■ Уравнения

2.7. Решите уравнение.

Уровень А — стандартные уравнения на различные способы решения уравнений. Приведем решения уравнений уровней Б и В.

Б

2) $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x$.

Решение. Заметим, что из условия следует, что $x>\sqrt{24}$.

$1+x\sqrt{x^2-24}=x^2-2x+1$, $x\sqrt{x^2-24}=x(x-2)$, $x\neq 0$. Поэтому $\sqrt{x^2-24}=x-2$, $x^2-24=x^2-4x+4$, $x=7$.

Ответ: $x=7$.

3) $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$.

Решение. ОДЗ: $x\geq 0$. Обозначим $\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=a$, тогда $\sqrt{x}=a^3-5$, где $a^3\geq 5$.

Получим уравнение $\sqrt[3]{19+a^3}=1+a \Rightarrow a^2+a-6=0$, $a=-3$ или $a=2$ ($a=-3$ не удовлетворяет условию $a^3\geq 5$). Решаем уравнение $\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=2 \Rightarrow \sqrt{x}=3$, откуда $x=9$.

Ответ: $x=9$.

5) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$.

Решение. Стандартное уравнение. ОДЗ: $6\leq x\leq 9$.

Возводим обе части в квадрат: $10-2\sqrt{x+1}\sqrt{9-x}=2x-12$, $\sqrt{x+1}\sqrt{9-x}=11-x$, вновь возводим обе части в квадрат: $-x^2+8x+9=121-22x+x^2 \Rightarrow x^2-15x+56=0$.

Ответ: $x=7$, $x=8$.

9) $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}$.

Решение. Обозначим $\sqrt{2x^2-8x+12}=a$, тогда $x^2-4x=\dfrac{a^2-12}{2}$, $a\geq 0$.

Решаем уравнение $\dfrac{a^2-12}{2}=a+6$, $a_1=6$, $a_2=-4$ ($a_2=-4$ — не удовлетворяет условию).

Решаем уравнение $\sqrt{2x^2-8x+12}=6$, откуда $x_1=-2$, $x_2=6$.

Ответ: $x_1=-2$, $x_2=6$.

10) $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0$.

Решение. $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{3x+2}$.

Возводим обе части в шестую степень: $(x+2)^3=(3x+2)^2$, $x^3-3x^2+4=0$, $x_1=-1$ — корень уравнения.

Получаем уравнение $x^3 - 3x^2 + 4 = (x^3 + x^2) - (4x^2 + 4x) + (4x + 4) = (x + 1)(x - 2)^2 = 0$, $x_2 = 2$.

Данному уравнению удовлетворяет $x = 2$ ($x = -1$ — посторонний корень).

Ответ: $x = 2$.

12) $\left(\sqrt[5]{3}\right)^x + \left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10} = 84.$

Решение. Обозначим $\left(\sqrt[10]{3}\right)^x = a$, $a > 0$. Получим уравнение

$a^2 + \dfrac{a}{3} - 84 = 0$; $a_1 = 9$, $a_2 = -\dfrac{28}{3}$ — не удовлетворяет условию;

$\left(\sqrt[10]{3}\right)^x = 9$, $x = 20$.

Ответ: $x = 20$.

13) $x^{\frac{\lg x+5}{3}} = 10^{5+\lg x}$.

Решение. Логарифмируем по основанию 10:

$\dfrac{\lg x + 5}{3} \cdot \lg x = 5 + \lg x$, $\lg x$ примем за a.

$(a + 5)a = 3(5 + a)$, $a_1 = 3$, $a_2 = -5$.

$x_1 = 1\,000$, $x_2 = 10^{-5} = 0{,}00001$.

Ответ: $x_1 = 1\,000$; $x_2 = 0{,}00001$.

14) $x^{\log_4 x} = 2^{3(\log_4 x - 1)}$.

Решение. Логарифмируем по основанию 2: $\log_4 x \log_2 x = 3(\log_4 x - 1)$, $\log_2 x = 2\log_4 x = 2a$.

$2a^2 = 3(a - 1)$, $2a^2 - 3a + 3 = 0$. Корней нет.

Ответ: корней нет.

20) $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$.

Решение. $5^{\lg x} = a$. Логарифмируем по основанию 10: $\lg 5 \cdot \lg x = \lg a$, тогда $\lg x^{\lg 5} = \lg a$; откуда $x^{\lg 5} = a$; $a = 50 - a$, $a = 25$, $\lg x = 2$, $x = 100$.

Ответ: $x = 100$.

В

Примеры этого уровня не содержат новых идей, но по сравнению с уровнем Б иногда более сложны в преобразованиях.

5) $6\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-2} = 5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}$.

Решение. ОДЗ: $x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

Это уравнение приводится к однородному. Обозначим $\sqrt[6]{x-3}=t$, $\sqrt[6]{x-2}=p$. Получим $6t^2+p^2=5tp$. Так как $p\neq 0$, то

$6\left(\frac{t}{p}\right)^2-5\left(\frac{t}{p}\right)+1=0$, $\left(\frac{t}{p}\right)_1=\frac{1}{2}$, $\left(\frac{t}{p}\right)_2=\frac{1}{3}$. $p=2t$ или $p=3t$.

Решаем уравнения: 1) $\sqrt[6]{x-2}=2\sqrt[6]{x-3}$; $63x=190$, $x=\frac{190}{63}$;

2) $\sqrt[6]{x-2}=3\sqrt[6]{x-3}$; $x-2=729(x-3)$; $728x=2\,185$, $x=\frac{2185}{728}$.

Оба найденные значения x принадлежат ОДЗ.

При $x\leq 2$ левая и правая части уравнения имеют разные знаки. Корней нет.

Ответ: $x_1=\frac{190}{63}$; $x_2=\frac{2185}{728}$.

10) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-4}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-4}}=3$.

Решение. Будем решать «в лоб».

Возводим обе части в квадрат: $2x+2\sqrt{x-\sqrt{x^2-4}}\sqrt{x+\sqrt{x^2-4}}=9$, произведение радикалов равно 2; $2x=5$, $x=2{,}5$.

Ответ: $x=2{,}5$.

12) $\frac{\lg\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\lg\sqrt[3]{x-40}}=3$.

Решение.

$\lg\left(\sqrt{x+1}+1\right)=\lg(x-40)$,

$\sqrt{x+1}+1=x-40$,

$\sqrt{x+1}=x-41$.

Решаем графически. Ветвь параболы и прямая пересекаются в одной точке при $x>41$. Подходит $x=48$.

Ответ: $x=48$.

20) $\lg(2^x+x-13)=x-x\lg5$.

Решение. $\lg(2^x+x-13)=\lg2^x$, откуда $x=13$.

Ответ: $x=13$.

■ Неравенства

2.8.

А

Разнообразные стандартные примеры на свойства корней, степеней, логарифмов, сводящиеся к линейным, квадратным, в одном примере — к дробно-линейным неравенствам.

Было бы полезным, обсудив идеи решения, дать обучающимся для устного решения часть этих заданий, например, 1), 2), 7), 8), 9).

Приведем некоторые решения.

1) $\sqrt{x}(x^2-1)<0$.

Решение. Произведение двух выражений отрицательное, если выражения имеют разные знаки. Поскольку $\sqrt{x}\ge 0$, то получим систему: $\begin{cases}\sqrt{x}>0,\\ x^2-1<0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>0,\\ |x|<1.\end{cases}$

Ответ: (0; 1).

7) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1)\ge 2$.

Решение. Слева убывающая логарифмическая функция $y=\log_{\frac{1}{3}}t\ge 2,\ 0<t\le\frac{1}{9},\ 0<5x-1\le\frac{1}{9},\ \frac{1}{5}<x\le\frac{2}{9}$.

Ответ: $\frac{1}{5}<x\le\frac{2}{9}$.

9) $(x-2)\lg^2(x-4)>0$.

Решение. Произведение значений двух выражений положительно, значит, знаки выражений одинаковые. Поскольку $\lg^2(x-4)\ge 0$ при всех $x>4$ (ОДЗ) и $x-2\ge 0$ при всех $x>4$, то $x>4$.

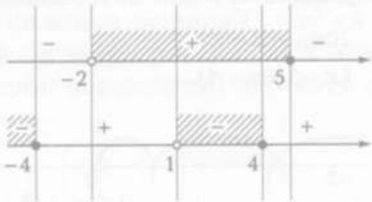
Ответ: $x>4$.

Б

Задания аналогичны заданиям уровня А по способам решения, но с бóльшим количеством действий. Приводим решение нескольких из них.

1) $\sqrt{\frac{5-x}{x+2}}\cdot\frac{x^2-16}{(x-1)^3}\le 0$.

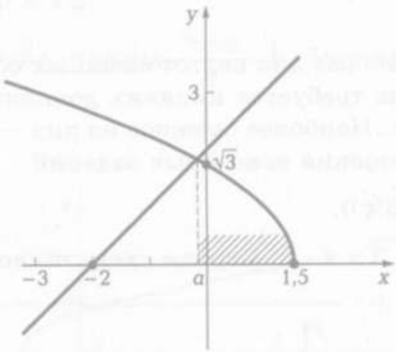
Решение. Неравенство равносильно системе: $\begin{cases} \dfrac{5-x}{x+2} \ge 0, \\ \dfrac{x^2-16}{(x-1)^3} \le 0. \end{cases}$



Ответ: (1; 4].

2) $\sqrt{3-2x} < (x+2)$.

Решение. Лучше решать графически. Слева убывающая функция, справа — возрастающая.



Получим (a; 1,5].

Находим a, решая уравнение:

$\sqrt{3-2x} = x+2,\ 3-2x = x^2+4x+4,\ x^2+6x+1=0,\ x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{8}$,

$x = -3-\sqrt{8}$ — посторонний корень; $a = -3+\sqrt{8} = -3+2\sqrt{2}$.

Ответ: $\left(-3+2\sqrt{2}; 1{,}5\right]$.

7) $\sqrt{\log_{0,5}(5-6x)} > 1$.

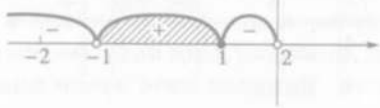
Решение. Заметим, что $\log_{0,5}t$ — убывающая функция. Неравенство $\sqrt{M} > 1$ дает ответ $M > 1$; $\log_{0,5}t > 1 \Rightarrow 0 < t < 0{,}5 \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 < 5-6x < 0{,}5 \Rightarrow -5 < -6x < -4{,}5 \Rightarrow \dfrac{3}{4} < x < \dfrac{5}{6}$.

Ответ: $\left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{5}{6}\right)$.

8) $\dfrac{\log_{0,5}(2-x)}{(x+1)(x-4)} \geq 0$.

Решение. Будем решать методом интервалов. ОДЗ: $x < 2$, $x \neq -1$.

Корень уравнения $\dfrac{\log_{0,5}(2-x)}{(x+1)(x-4)} = 0$ один: $x = 1$.



Для проверки знаки в интервалах легко определить подстановкой чисел.

Ответ: (–1; 1].

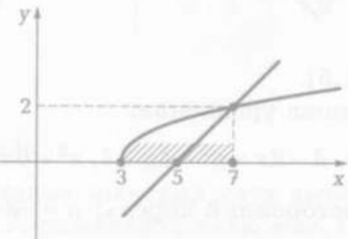
B

Задания, посильные для подготовленных обучающихся. Для их выполнения не требуется никаких дополнительных знаний сверх программы. Наиболее сложное из них — задание 3.

Рассмотрим решения некоторых заданий.

1) $x - \sqrt{x-3} - 5 < 0$.

Решение. $\sqrt{x-3} > x - 5$. Строим схематично график неравенства.



Точка пересечения графиков имеет координаты (7; 2).

Ответ: [3; 7).

2) $(x+1)\sqrt{x^2+1} \geq x^2 - 1$.

Решение. ОДЗ: $x \in \mathbf{R}$.

Переносим в одну сторону и раскладываем на множители:

$$(x+1)\left(\sqrt{x^2+1} - x + 1\right) \geq 0.$$

Решаем системы: 1) $\begin{cases} x+1 \ge 0, \\ \sqrt{x^2+1} \ge x-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+1 \le 0, \\ \sqrt{x^2+1} \le x-1. \end{cases}$

Вторая система не имеет решений ($\sqrt{x^2+1} > 0$ при всех x, а $x-1 \le 0$). В первой системе при $-1 < x < 1$ оба неравенства верны; при $x \ge 1$ во втором неравенстве обе части неотрицательные; возводим в квадрат:

$$\begin{cases} x \ge -1, \\ x^2+1 \ge x^2-2x+1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge -1, \\ x \ge 0. \end{cases}$$

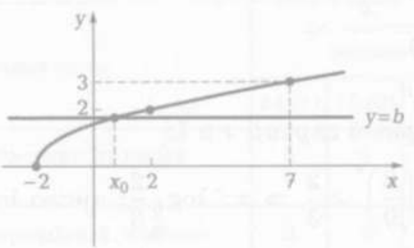
Ответ: $[0; +\infty]$.

3) Для любых значений a решите неравенство $a\sqrt{x+2} > 3-a$.

Заметим, что при $a = 0$ решений нет. Рассмотрим случаи $a > 0$ и $a < 0$.

Первый случай: $a > 0$.

$\sqrt{x+2} > \dfrac{3-a}{a}$. Обозначим $\dfrac{3-a}{a} = b$. Решаем графически $\sqrt{x+2} > b$.



При $b < 0$: $x \ge -2$, при $b = 0$: $x > -2$, при $b > 0$: $x > b^2 - 2 \Rightarrow$ $x > \dfrac{-a^2-6a+9}{a^2}$.

Определяем знаки выражения $b = \dfrac{3-a}{a}$.

Для $a > 0$ получаем при $a > 3$: $x \ge -2$, при $a = 3$: $x > -2$, при $a \in (0; 3)$: $x > -\dfrac{a^2+6a-9}{a^2}$.

Второй случай: $a < 0$.

$\sqrt{x+2} < \frac{3-a}{a} = b$. Заметим, что при $a < 0$ выражение $\frac{3-a}{a} = b$ отрицательно; ответ для второго случая: при $a < 0$ решений нет.

Ответ: при $a \le 0$ решений нет; при $0 < a < 3$: $x > -\frac{a^2+6a-9}{a^2}$; при $a = 3$: $x > -2$; при $a > 3$: $x \ge -2$.

5) $9^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} > 2^{\frac{2}{x}+1}$.

Решение. Перепишем неравенство в виде:

$$\left(3^{\frac{1}{x}}\right)^2 + 2^{\frac{1}{x}} \cdot 3^{\frac{1}{x}} > 2 \cdot \left(2^{\frac{1}{x}}\right)^2.$$

Это однородное неравенство. Разделим почленно на $2^{\frac{2}{x}}$:

$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} - 2 > 0$ [обозначим $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = m$], $m^2 + m - 2 > 0$, $m \in (-2; 1)$;

$$-2 < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} < 1 \Rightarrow \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow x < 0.$$

Ответ: $x < 0$.

10) $8^x \ge 6 \cdot 9^{|x-1|}$.

Решение. Первый случай $x \ge 1$:

$8^x \ge 6 \cdot 9^{x-1} \Rightarrow \left(\frac{8}{9}\right)^x \ge \frac{2}{3} \Rightarrow x \le \log_{\frac{8}{9}} \frac{2}{3}$; число $\log_{\frac{8}{9}} \frac{2}{3} < 1$, поэтому на рассматриваемой области $x \ge 1$ решений нет.

Второй случай $x < 1$:

$8^x \ge 6 \cdot 9^{1-x}$, $(72)^x \ge 54$, $x \ge \log_{72} 54$; число $\log_{72} 54 < 1$.

Ответ: $(-\infty; \log_{72} 54]$.

ГЛАВА 3

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Содержание темы

Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельность прямой и плоскости. Параллельность плоскостей. Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный угол. Угол между плоскостями. Перпендикулярность двух плоскостей. Геометрические преобразования пространства: параллельный перенос, симметрия относительно плоскости. Параллельное проектирование. *Площадь ортогональной проекции*. Изображение пространственных фигур.

Требования к результатам обучения

В результате освоения данной темы обучающийся должен *уметь*:

- описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, *аргументировать свои суждения об этом расположении*;
- использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;
- проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

Примерное поурочное планирование

Содержание темы	Количество часов на тему (вариант программы)				
	24 (1)	10 (2)	24 (4)	24 (4)	8 (5)
Взаимное расположение прямых и плоскостей	8	3	8	8	2
Параллельность прямых и плоскостей	8	2	8	8	2
Углы между прямыми и плоскостями	6	3	6	6	2
Беседа	1	1	1	1	1
Контроль усвоения	1	1	1	1	1

Программа не требует традиционного аксиоматического построения начал стереометрии. Учебник построен на описательном изложении материала темы с использованием накопленных пространственных представлений (в настоящее время со значительной частью стереометрических понятий обучающийся знакомится в основной школе). В то же время важное развивающее значение имеет беседа исторического характера, которая включается во все варианты поурочного планирования.

Обратим внимание на то, что в тексте главы и предлагаемых задачах широко используются не только «бесконечные» объекты, которым посвящена глава, но и простейшие знакомые пространственные тела — куб, призма, пирамида.

Варианты 2 и 4 планирования, дающие мало часов на эту тему (8—10 ч), предусматривают фактически лишь приведение в порядок накопленных пространственных представлений и развитие языка, необходимого для их описания и осознания.

Рекомендации по решению задач

■ Взаимное расположение прямых и плоскостей

3.7. Докажите, что если n прямых попарно пересекаются друг с другом, то они все лежат в одной плоскости.

Указание. Предполагается, естественно, что все прямые не пересекаются в одной точке, иначе задача заведомо неверна. На этой задаче полезно проиллюстрировать использование метода математической индукции.

Доказательство. Для $n = 2$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение верно для n прямых. Докажем, что тогда оно верно и для $(n + 1)$ прямых. Действительно, пусть P — плоскость, в которой лежат все n прямых, α_1 и α_2 — любые две из них, а α_3 – $(n+1)$-я прямая. По предположению, α_1, α_2, α_3 лежат в одной плоскости. Но эта плоскость должна совпасть с P, так как через α_1 и α_2 проходит только одна плоскость.

3.9. Даны n попарно скрещивающихся прямых. Каким может быть общее количество точек пересечений этих прямых с двумя пересекающимися плоскостями?

Решение. Наибольшее число точек пересечения, очевидно, равно $2n$ (каждая прямая независимо от остальных пересекает две плоскости в двух точках, причем никакие две точки не совпадают).

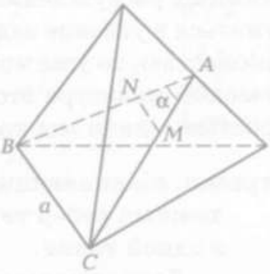
Покажем, что наименьшее число возможных точек пересечения равно $(n - 1)$. Пусть P_1 и P_2 — данные плоскости, а α — их линия пересечения. Среди данных прямых может существовать не более одной прямой, параллельной обеим плоскостям, так как каждая такая прямая будет параллельна. Если бы существовали две такие прямые, они были бы параллельны друг другу, что противоречит условию. Отсюда следует, что число точек пересечения не может быть меньше $(n - 1)$, так как в этом случае было бы не меньше двух прямых, параллельных обеим плоскостям.

Покажем, что число точек может быть равным $(n - 1)$. Пусть все прямые параллельны P_1, а P_2 параллельна одной из прямых. Как было доказано ранее, остальные $(n - 1)$ прямых должны пересекаться с P_2. Таким образом, получаем $(n - 1)$ точку пересечения.

Ответ: $n - 1 \le k \le 2n$, k — число точек пересечения.

3.11. M и N — центры тяжести (точки пересечения медиан) граней правильного тетраэдра. Найдите длину отрезка MN, если ребро тетраэдра равно a.

Решение. N, M — центры тяжести граней — точки пересечения медиан. По свойству точки пересечения медиан $\frac{|AN|}{|AB|} = \frac{|AM|}{|AC|} = \frac{1}{3}$, ΔAMN и ΔABC подобны, откуда $NM = \frac{a}{3}$.



Указание. Если к моменту решения данной задачи обучающимся будет известен косинус двугранного угла правильного тетраэдра, то можно рассмотреть и другое решение.

Пусть A — середина общего ребра граней. Рассмотрим треугольник AMN. $|MN|^2 = |AM|^2 + |AN|^2 - 2|AM|\,|AN| \cos \alpha$, где α — двугранный угол правильного тетраэдра. Длина медианы равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $|AM| = |AN| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Отсюда $|MN| = \frac{a}{3}$.

Ответ: $\frac{a}{3}$.

3.12. Докажите, что если сечение параллелепипеда является многоугольником с числом сторон, бо́льшим трех, то у него есть параллельные стороны.

Доказательство. Такое сечение должно пересечь не меньше четырех граней, а среди них обязательно найдутся две параллельные.

3.13. Докажите, что в сечении куба не может получиться правильный пятиугольник.

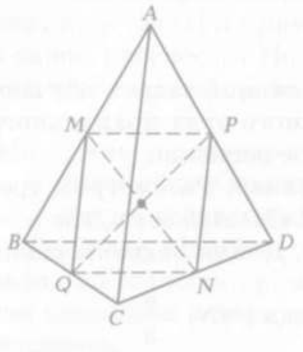
Доказательство следует из предыдущей задачи.

3.15. Докажите, что существует плоскость, пересекающая все n попарно скрещивающихся прямых.

Доказательство. При $n = 2$ очевидно. Предположим, что утверждение доказано для $n > 2$. Докажем, что тогда оно верно и для $(n + 1)$ прямой. Пусть P — плоскость, пересекающая n прямых, и $\alpha > 0$ — наименьший из углов между P и этими прямыми. Если при этом P параллельна $(n + 1)$-й прямой, то, повернув ее на угол, меньший α, получим, что P не параллельна всем $(n + 1)$ прямым.

Указание. Многие задачи на доказательство не требуют больших вычислений и длинных рассуждений. Нужно только знать основные факты и вдуматься в условие задачи. Если обучающийся обладает такой способностью, то уже можно говорить о довольно высокой математической культуре этого обучающегося. Вот почему следующие простые задачи мы разместили в уровне В.

3.16. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке.



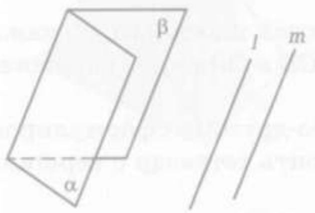
Доказательство. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$.

Пусть M и N — середины ребер AB и CD, а P и Q — середины ребер AD и BC. PN — средняя линия треугольника ADC, поэтому $PN \parallel AC$. Аналогично $MQ \parallel AC$, $NQ \parallel BD$ и $PM \parallel BD$. Тем самым мы доказали, что $MPNQ$ — параллелограмм, а MN и PQ — его диагонали.

■ Параллельность прямых и плоскостей

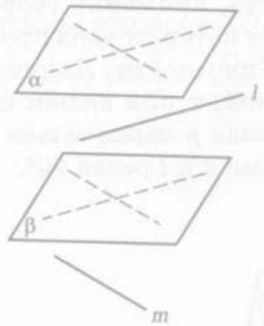
3.19. Пусть a, b — прямые, α, β — плоскости, причем прямые не лежат в этих плоскостях. Рассмотрим следующие утверждения: $a \parallel \alpha$, $b \parallel \beta$, $a \parallel b$, $\alpha \parallel \beta$. Из каких трех утверждений следует четвертое?

Решение. Нарисуем две пересекающиеся плоскости α и β и две прямые l и m, параллельные этим плоскостям и параллельные между собой. Это легко сделать, откуда следует, что четвертое утверждение не следует из первых трех.



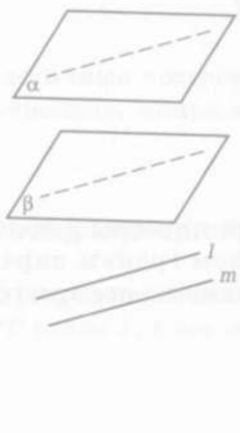
α не параллельна β
$l \parallel m$
$l \parallel \alpha,\ l \parallel \beta$
$m \parallel \alpha,\ m \parallel \beta$

Нарисуем теперь две параллельные плоскости α и β и прямые l и m, не параллельные между собой, но одна параллельна первой плоскости, а другая — второй. Это тоже легко сделать, откуда следует, что из первых двух утверждений и четвертого не следует третье.



$\alpha \parallel \beta$
$l \parallel \alpha,\ l \parallel \beta$
$m \parallel \alpha,\ m \parallel \beta$
l не параллельна m

Наконец, нарисуем две параллельные плоскости α и β и две параллельные прямые l и m, одна из которых параллельна одной, а следовательно, и второй плоскости.



$\alpha \parallel \beta$
$l \parallel \alpha,\ l \parallel \beta \Rightarrow$
$m \parallel l \Rightarrow$
$m \parallel \alpha,\ m \parallel \beta$

Видим, что теперь вторая прямая также параллельна этим плоскостям, в частности второй плоскости, т. е. из утверждений 1, 3, 4 следует утверждение 2 или, что то же самое, из утверждений 2, 3, 4 следует утверждение 1.

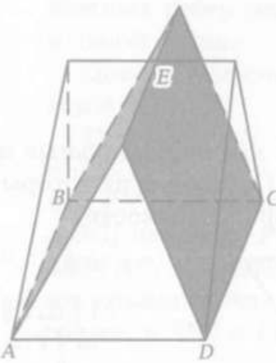
3.21. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Докажите, что середины отрезков AB, BC, CD и DA служат вершинами параллелограмма.

Указание. Эта задача является по-другому сформулированной задачей 3.16. Достаточно построить тетраэдр с вершинами в точках A, B, C, D.

К этой же теме относится и задача 3.20.

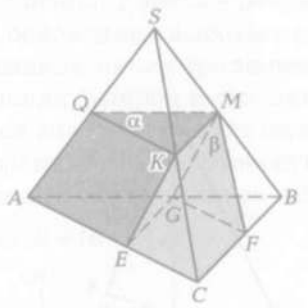
3.25. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка E вне его плоскости. Плоскости ABE и CDE пересекаются по прямой p, а плоскости BCE и ADE — по прямой l. Найдите угол между прямыми p и l.

Решение. Эту задачу можно решить, применив теорему о линии пересечения двух плоскостей, из которых одна проходит через прямую, параллельную другой плоскости. Линия пересечения будет параллельна этой прямой, т. е. в нашем случае прямая l параллельна AB и CD, а прямая p параллельна AD и BC, следовательно, угол между прямыми p и l равен 90°.



Ответ: 90°.

3.30. Через точку на ребре треугольной пирамиды проведены две плоскости, параллельные двум граням пирамиды. Разрежьте оставшийся многогранник на две треугольные призмы.



$\alpha \parallel ABC$

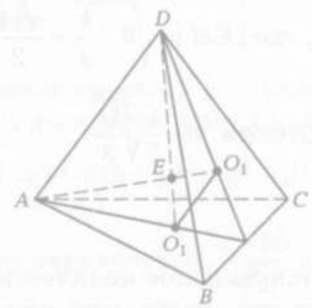
$\beta \parallel ASC$

Призмы: $EKCGMF$ и $KQMAGE$.

3.33. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противолежащих граней, пересекаются в одной точке и делятся в отношении 3:1.

Доказательство. Пусть A, B, C, D — вершины тетраэдра; O_1, O_2 — точки пересечения медиан граней ABC и BCD; E — точка пересечения отрезков AO_2 и DO_1. Для пары граней ABC и BCD:

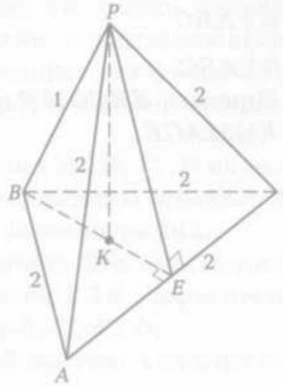
$$\frac{|O_1O_2|}{|AD|} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{|O_2E|}{|AE|} = \frac{|O_1E|}{|DE|} = \frac{1}{3}.$$

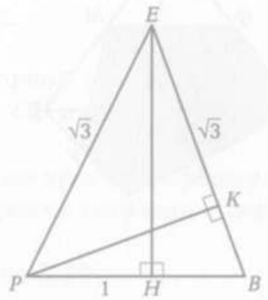


Аналогичные построения можно сделать для любой другой пары отрезков, например, соответствующих граням ABC и ACD.

Перпендикулярность прямых и плоскостей

3.46. Нарисуйте и вычислите высоту тетраэдра $PABC$, если ребро PB равно 1, а все остальные ребра равны 2.





Решение. Пусть E — середина ребра AC. Легко видеть, что $AC \perp BPE$, так как $AC \perp BE$ и $AC \perp PE$. В треугольнике BPE длины сторон равны 1, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$. Высота пирамиды совпадает с высотой PK треугольника BPE ($PK \perp AC$ и $PK \perp BE$). Площадь треугольника BPE равна по формуле Герона: $S = \sqrt{(0{,}5 + \sqrt{3}) \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot (\sqrt{3} - 0{,}5)} = \frac{1}{4}\sqrt{11}$. Площадь равнобедренного ΔPBE можно также вычислить по формуле $S_{\Delta BPE} = \frac{1}{2}|PB| \cdot |EH|$, где $|EH| = \sqrt{3 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$. С другой стороны, $S = \frac{1}{2}h|BE| = \frac{1}{2}h\sqrt{3}$. Отсюда $h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{3}}$.

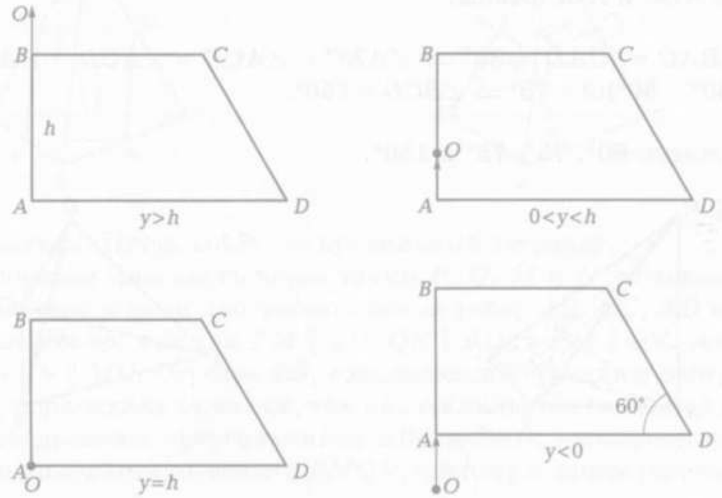
Ответ: $h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{3}}$.

В задачнике имеется большое количество задач, в которых требуется что-то построить, изобразить или нарисовать. В этих задачах важно понимать, как должна быть изображена фигура, например, какие отрезки параллельны, куда попадает основание высоты пирамиды, как расположено сечение фигуры плоскостью и т. д.

Во многих случаях хороший рисунок помогает решить задачу. К таким задачам относится, например, следующая задача.

3.48. Нарисуйте высоту четырехугольной пирамиды $PABCD$, если все ее боковые ребра равны, а в основании лежит равнобочная трапеция с углом при основании 60°.

Решение. Боковые ребра у пирамиды по условию равны, значит, основанием высоты пирамиды является центр окружности, описанной около трапеции, т. е. точка пересечения срединных перпендикуляров к сторонам. Может ли основание высоты оказаться вне трапеции, на нижнем основании трапеции, на верхнем основании? Чтобы ответить на этот вопрос, нарисуем половину трапеции. Обозначим ее $ABCD$ и пусть $|AB| = h$, $|AD| = a$, $|BC| = b$. Тогда $h = (a - b)\sqrt{3}$.



Пусть O — основание высоты и y — расстояние от точки A до основания высоты. Рассмотрим треугольники OBC и OAC. По условию, $|OC| = |OD| \Rightarrow b^2 + (h \pm y)^2 = a^2 + y^2 \Rightarrow \pm y = \dfrac{a - 2b}{\sqrt{3}}$.

Так как $a \geq b$, то неравенство $\dfrac{a - 2b}{\sqrt{3}} \geq (a - b)\sqrt{3} \Leftrightarrow a - 2b \geq$

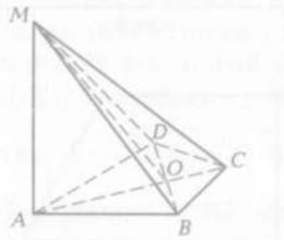
$\geq 3(a - b) \Leftrightarrow b \geq 2a$ невозможно, т. е. $y \leq h$. Далее мы видим, что при $0 < b < \dfrac{a}{2}$ основание высоты лежит внутри трапеции, при $b = \dfrac{a}{2}$ — на нижнем основании, при $\dfrac{a}{2} < b < a$ — вне трапеции (ниже нижнего основания).

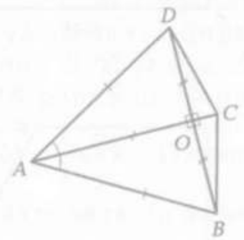
3.49. В основании пирамиды $MABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, диагонали которого AC и BD перпендикулярны и равны. Основание высоты совпадает с точкой A, а боковые ребра MB, MC и MD равны между собой. Найдите углы при вершинах четырехугольника $ABCD$.

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей. Поскольку ребра MB, MC и MD равны между собой, то и их проекции на плоскость основания — отрезки AB, AC и AD — будут равны. Имеем в основании четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = AC = AD = DB$ и $AC \perp DB$. ΔABD — равносторонний, $\angle A = 60°$, отрезок AO является биссектрисой. Равнобедренные треугольники ADC и ABC равны.

$$\angle BAC = \angle CAD = 30° \Rightarrow \angle ABC = \angle ACB = \angle ACD = \angle ADC = (180° - 30°):2 = 75° \Rightarrow \angle BCD = 150°.$$

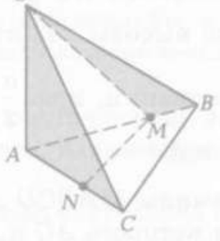
Ответ: 60°, 75°, 75° и 150°.





3.51. Существует ли четырехугольная пирамида с выпуклым основанием, у которой две боковые противоположные грани перпендикулярны основанию?

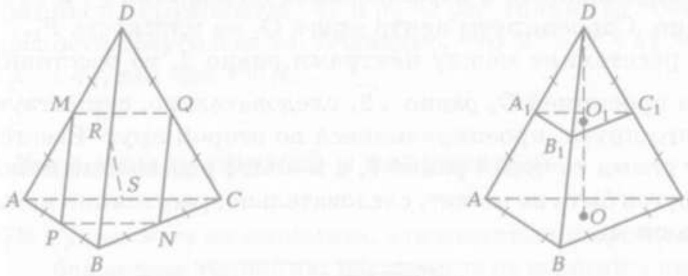
Решение. Рассмотрим треугольную пирамиду $SABC$, у которой ребро $SA \perp ABC$. Но тогда плоскость $SAB \perp ABC$ и плоскость $SAC \perp ABC$. Отметим на AB и AC произвольные точки M и N соответственно. Тогда пирамида с основанием $MBCN$ и вершиной S удовлетворяет условию задачи.



Ответ: существует.

■ Расстояния

3.57. Все вершины правильного тетраэдра с ребром, равным 4, равноудалены от некоторой плоскости. Найдите расстояния, на которые они удалены. (Возможны два варианта.)



Решение. Пусть $DABC$ — правильный тетраэдр.

Проведем плоскость через точки P, Q, M и N, которые являются серединами противоположных ребер AB, DC, AD и BC. Это возможно, так как $PM \parallel BD$, $QN \parallel BD \Rightarrow PM \parallel QN$. Аналогично $PN \parallel MQ$. Отрезок RS, соединяющий середины ребер BD и AC, перпендикулярен им, так как он является медианой двух равнобедренных треугольников ARC и BSD, а следовательно, перпендикулярен плоскости $PMQN$, поэтому искомое расстояние d равно половине его длины, т. е. $d = \frac{1}{2}|RS|$.

RS — высота равнобедренного треугольника BSD со сторонами 4; $2\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$. Отсюда находим $d = \frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = \sqrt{2}$. Если провести плоскость через середины других ребер, то получим тот же результат. Принципиально другая плоскость, равноудаленная от всех вершин, проходит параллельно основанию ABC тетраэдра через середину его высоты. Длина высоты равна $\frac{4}{3}\sqrt{6}$.

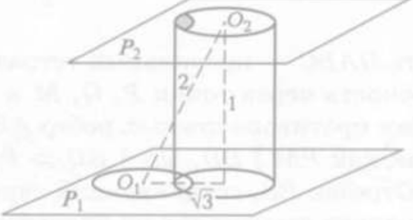
Следовательно, расстояние от вершин до плоскости равно $\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ и $\sqrt{2}$.

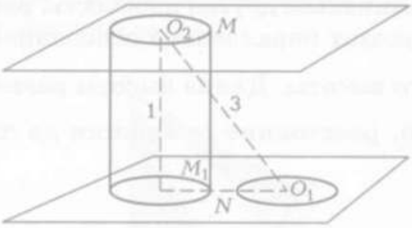
3.60. Два круга радиусом, равным единице, расположены в параллельных плоскостях. Расстояние между этими плоскостями равно единице. Найдите расстояние между кругами, если расстояние между центрами кругов равно: а) 2; б) 3.

Решение. Расстояние между кругами — это наименьшее расстояние между любыми точками кругов. Оно не может быть меньше расстояния между плоскостями. Пусть O_1, O_2 — центры кругов, расположенных в параллельных плоскостях P_1 и P_2 соответственно. Спроецируем центр круга O_2 на плоскость P_1.

а) Если расстояние между центрами равно 2, то расстояние между O_1 и проекцией O_2 равно $\sqrt{3}$, следовательно, существуют точки одного круга, проецирующиеся во второй круг. Расстояние между этими точками равно 1, а меньше расстояние между точками кругов быть не может, следовательно, расстояние между кругами равно 1.



б) Если же расстояние между центрами равно 3, то расстояние между O_1 и проекцией O_2 равно $\sqrt{8}>2$, поэтому ни одна проекция точек одного круга не попадет во второй круг. Следовательно, наименьшим расстоянием между точками кругов будет расстояние MN. Пусть M_1 — проекция точки M на плоскость, на которой расположен другой круг. Тогда $|MN|=\sqrt{|M_1N|^2+1^2}=\sqrt{(\sqrt{8}-2)^2+1}=\sqrt{13-8\sqrt{2}}$.



Ответ: а) 1; б) $\sqrt{13-8\sqrt{2}}$.

3.62. Точка K равноудалена от всех сторон треугольника, а точка L равноудалена от всех его вершин. Какая из точек ближе к плоскости треугольника, если расстояние от точки K до сторон равно расстоянию от точки L до вершин?

Решение. Пусть d — расстояние от точки K до сторон и от точки L до вершин. Легко видеть, что точка K проецируется в центр вписанной окружности, а точка L — в центр описанной окружности. Пусть r и R — радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей; h_K и h_L — расстояния от точек K и L до плоскости треугольника. Очевидно, что $d^2 = r^2 + h_K^2 = R^2 + h_L^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow h_L < h_K$, так как $r < R$.

■ Угол между прямой и плоскостью

3.70. Существует ли пирамида, в основании которой лежит равнобедренная трапеция, расстояние от вершины пирамиды до всех сторон трапеции равно 11, а основания трапеции равны соответственно 18 и 32?

Решение. Если бы такая пирамида существовала, то в ее основание можно было бы вписать окружность радиуса, равного половине высоты трапеции. В этом случае боковая сторона трапеции будет равна $\frac{1}{2}(|DC| + |AD|) = 25$, $h = \sqrt{625 - 49} = 24$ (h — высота трапеции). Радиус вписанной окружности $r = \frac{24}{2} = 12$. Но высота боковой грани по условию равна 11. Получается, что длина наклонной меньше длины ее проекции, что невозможно.

Ответ: не существует.

3.75. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ в основании лежит правильный треугольник со стороной a. Высота пирамиды SO равна h. Найдите угол между прямой AC и плоскостью BSC.

Решение. Пусть AE — высота пирамиды, опущенная из вершины A на грань BCS. Нужно вычислить угол α (угол ACE) между ребром AC и плоскостью BSC. Вычисляем объем пирамиды двумя способами: $\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}h$ и $\frac{1}{3}S_{\Delta BCS}\,|AE|$, площади граней ABC и BSC равны соответственно $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и $\frac{a}{2}\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$;

$$\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}h=\frac{1}{3}S_{\Delta BCS}\,|AE|\Rightarrow|AE|=\frac{S_{\Delta ABC}h}{S_{\Delta BCS}}=$$

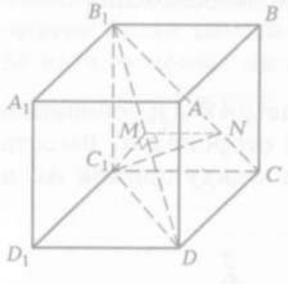
$$=\frac{ah\sqrt{3}}{2\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}}=\frac{3ah}{\sqrt{12h^2+a^2}}.$$

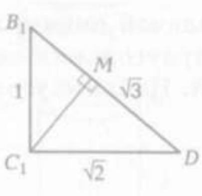
Отсюда $\sin\alpha=\frac{|AE|}{|AC|}=\frac{3h}{\sqrt{12h^2+a^2}}$.

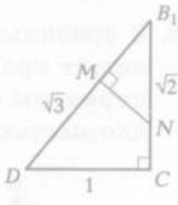
Ответ: $\alpha=\arcsin\frac{3h}{\sqrt{12h^2+a^2}}$.

3.77. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между сечениями AB_1C_1D и CB_1A_1D.

Решение. Не ограничивая общности, будем считать длину ребра куба равной 1.







Рассмотрим пирамиду B_1CDC_1. Искомый угол равен углу α между гранями B_1DC_1 и B_1DC. Заметим, что все грани этой пирамиды — прямоугольные треугольники. Высота C_1M треугольника B_1DC_1 равна $|C_1M|=\sqrt{\frac{2}{3}}$. Проведем перпендикуляр MN к DB_1 до пересечения с B_1C и рассмотрим треугольник MNB_1:

$|MB_1| = \sqrt{|B_1C_1|^2 - |MC_1|^2} = \sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Из подобия треугольников B_1DC и MNB_1 получим: $\frac{|MN|}{|CD|} = \frac{|MB_1|}{|CB_1|} \Rightarrow |MN| = \frac{1}{\sqrt{6}}$;

$|NB_1| = \sqrt{|MB_1|^2 + |MN|^2} = \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Учитывая, что $\angle CB_1C_1 = 45°$, получаем по теореме косинусов $(C_1N)^2 = \frac{1}{2}+1-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. Наконец, угол C_1MN находим из теоремы косинусов для треугольника C_1MN:

$|C_1N|^2 = |MN|^2 + |C_1M|^2 - 2\,|MN|\cdot|C_1M|\cdot\cos\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{6}+\frac{2}{3}-2\sqrt{\frac{1}{6}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Проецирование

3.79. Придумайте фигуру, при проецировании которой на три взаимно перпендикулярные плоскости получим круг, квадрат и треугольник.

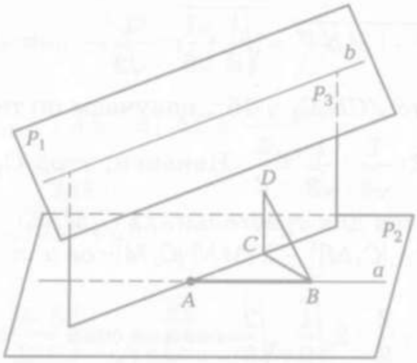
Решение. Рассмотрим цилиндр, высота которого равна диаметру основания. Проведем через его ось две взаимно перпендикулярные плоскости P_1 и P_2. Пусть P_1 пересекает верхнее основание по отрезку AB, а P_2 пересекает нижнее основание по отрезку CD. Проведем две плоскости через точки A, B, C и A, B, D. Эти плоскости вырезают из цилиндра требуемую фигуру.

3.96. Две прямые a и b скрещиваются. На прямой a отмечен отрезок AB. Через прямую b проводятся всевозможные плоскости, и на каждую из этих плоскостей проецируется отрезок AB. Есть ли среди них такая плоскость, проекция на которую является наименьшей? Как ее построить?

Решение. Прямые a и b лежат в параллельных плоскостях P_1 и P_2. Проводим через b плоскость P_3. Угол между прямой a и P_3 будет наименьшим, если $P_3 \perp P_2$. Тогда и проекция AB на P_3 также будет наименьшей. Действительно, пусть l — прямая пересечения плоскостей P_1 и P_3; A — точка пересечения плоскости P_3 с прямой a; AB — отрезок на прямой a; AD — проекция AB на плоскость P_3. Тогда $BD \perp P_3 \Rightarrow$ плоскость $ABD \perp P_3$. Пусть

AC — проекция AD на l, тогда $DC \perp AC \Rightarrow BC \perp AC$ по теореме о трех перпендикулярах.

Теперь имеем: $|AD| \geq |AC|$. Равенство наступит только тогда, когда плоскость P_3 будет перпендикулярна плоскости ABC, т. е. точка D совпадет с точкой C.



3.97. Используя параллельное проецирование, докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Решение. Если треугольник равнобедренный, то это легко доказывается непосредственно. При подходящем выборе плоскости проекции проекция любого треугольника будет равнобедренным треугольником. Но при проецировании медиана проецируется на медиану. Отсюда следует требуемое утверждение.

3.98. Используя параллельное проецирование, докажите, что точки пересечений диагоналей трапеции, продолжений боковых сторон трапеции и середины оснований лежат на одной прямой.

Решение. Рассмотрим треугольник, образованный нижним основанием и продолжениями боковых сторон трапеции. При подходящем проецировании его проекция будет равнобедренной. Для проекции утверждение очевидно. Тогда оно верно и для исходной трапеции.

ГЛАВА 4
КОМБИНАТОРИКА

Содержание темы

Основные понятия комбинаторики. Задачи на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний. Решение задач на перебор вариантов. Формула бинома Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.

Требования к результатам обучения

В результате освоения данной темы обучающийся должен *уметь*:

- решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул.

Примерное поурочное планирование

Содержание темы	Количество часов на тему (варианты программы)				
	12 (1)	8 (2)	12 (3)	12 (4)	4 (5)
Комбинаторные конструкции	4	3	4	4	2
Правила комбинаторики	5	3	5	5	1
Число орбит	1	—	1	1	—
Беседа	1	1	1	1	1
Контроль усвоения	1	1	1	1	—

Освоение темы «Комбинаторика» находится в процессе активного развития. Практически весь материал темы может и должен быть изучен в основной школе, однако процесс его включения в реальную практику обучения происходит медленно и неравномерно. Может оказаться так, что в группе будут обучающиеся с совершенно различным опытом работы с комбинаторными задачами. Поэтому эта тема особенно требует развития методов индивидуальной работы.

Изложение темы в учебнике, делающее акцент на решение «модельных» задач, а не на доказательство формул, позволяет достаточно продуктивно использовать отводимое время на развитие комбинаторного мышления обучающихся. Крайне важно отойти от традиционной методики, делающей упор на классификацию комбинаторных понятий (размещения, перестановки, сочетания и т. п.) с последующей практикой опознания, «на что» дается та или иная задача. Каждый раз полезно проводить схему перебора вариантов с самого начала и в каких-то случаях находить параллели с «модельными» и ранее рассмотренными ситуациями.

Рекомендации по подготовке к контрольной работе

■ Правило произведения

Тренировка в применении правила произведения с различными ограничениями на примере составления последовательностей из 5 цифр.

Можно составить таблицу, в которую вписывать число вариантов для выбора цифры на каждом из 5 мест.

Ограничения	1	2	3	4	5	Всего
Наборы цифр без ограничений	10	10	10	10	10	10^5
5-значные числа (первая цифра отлична от нуля)	9	10	10	10	10	$9 \cdot 10^4$
5-значные числа с четной второй и четвертой цифрой	9	5	10	5	10	$9 \cdot 5^2 \cdot 10^2$
Наборы с неповторяющимися цифрами	10	9	8	7	6	$6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$
5-значные числа, у которых рядом стоящие цифры различны	9	9	9	9	9	9^5
Наборы с чередующимися четными и нечетными цифрами	10	5	5	5	5	$10 \cdot 5^4$

Можно предложить обучающимся самим придумать ограничения и добавить их в таблицу.

■ Повторные испытания

Напомнить, как считается число вариантов при повторных испытаниях с двумя исходами (бросание монеты: о — «орел»; р — «решка») с помощью формулы бинома Ньютона (при небольших показателях):

$$(o + p)^5 = 1 \cdot o^5 + 5 \cdot o^4 p^1 + 10 \cdot o^3 p^2 + 10 \cdot o^2 p^3 + 5 \cdot o^1 p^4 + 1 \cdot p^5.$$

Биномиальный коэффициент при $o^k p^{n-k}$ (т. е. число $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$) показывает, сколько раз при n бросаниях выпадет ровно k раз «орел» (и тем самым $(n-k)$ раз «решка»).

Задача. Монету бросали 6 раз. В каком числе вариантов «орел» выпадет хотя бы один, но не более трех раз?

Решение. Нас устраивает следующее число раз выпадания «орла»: 1, 2, 3.

Ответ: $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 = 6 + \frac{6 \cdot 5}{2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 6 + 15 + 20 + = 41.$

Перестановки

Повторить правило подсчета числа перестановок букв в слове, в котором буквы могут повторяться. Предложить заполнить таблицу.

Слово	«САПОГ»	«БАГАЖ»	«ТОПОТ»	«КАРАКАС»	«ОКОЛОТОК»
Число анаграмм	$5!$	$\frac{5!}{2}$	$\frac{5!}{2! \cdot 2!}$	$\frac{7!}{3! \cdot 2!}$	$\frac{8!}{4! \cdot 2!}$

Выборки

Повторить правило подсчета числа выборок k предметов из n возможных (при небольших k):

- при $k = 2$ $\quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$;
- при $k = 3$ $\quad C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

Задача. Каким числом способов можно составить команду из двух девочек и четырех мальчиков, выбирая их из группы в 20 человек, в которой 12 мальчиков и 8 девочек.

Ответ: $C_{12}^4 \cdot C_8^2 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{24} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 7.$

Рекомендации по решению задач

4.1. В алфавите 15 букв, из которых 10 согласных и 5 гласных, а также 10 обычных цифр. Каким числом способов можно образовать следующие комбинации?

1) Выражение, состоящее из одной буквы и двух произвольных цифр (например, A05).

Решение. На первое место ставим любую из 15 букв, на второе и третье — цифру. Выбор делается независимо.

Ответ: $15 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,500$.

2) Слово из двух букв, ровно одна из которых согласная.

Решение. В слове одна согласная С и одна гласная Г. Зафиксируем сначала их порядок: СГ. Получаем $10 \cdot 5 = 50$ вариантов. При другом порядке ГС: $5 \cdot 10 = 50$ вариантов.

Ответ: 100.

3) Слово из трех произвольных букв.

Решение. Выбор независим $15 \cdot 15 \cdot 15$.

Ответ: 15^3.

4) Выражение, состоящее из двух букв и четырех цифр (в любой последовательности).

Решение. Ставим в ряд независимо друг от друга 6 символов из $15 + 10 = 25$ возможных.

Ответ: $25^6 = 5^{12}$.

5) Выражение из 6 знаков с чередующимися буквами и цифрами, начинающееся с цифры.

Расстановка описана четко и однозначно: ЦБЦБЦБ.

Ответ: $10^3 \cdot 15^3 = 150^3$.

6) Выражение из 8 символов, с различными цифрами на 3-м и 5-м местах.

Решение. Символы на шести местах выбирают произвольно (25^6 вариантов), а на два оставшихся места приходится $10 \cdot 9 =$ $= 90$ вариантов.

Ответ: $90 \cdot 25^6$.

7) Слово из 5 букв, в которых рядом стоящие буквы различны.

Решение. Первая буква произвольна, на каждую следующую — один запрет.

Ответ: $15 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 14 = 15 \cdot 14^4$.

8) Число из 5 цифр, оканчивающееся не нулем и кратное 2 (первая цифра может быть нулем).

Решение. Первые четыре цифры произвольны (10^4 варианта). На последнюю цифру приходится 4 варианта (2, 4, 6, 8).

Ответ: $4 \cdot 10^4$.

9) Последовательность из 6 знаков, среди которых встречается не более одной гласной.

Решение. Легче всего разбить на два случая — ни одной гласной и одна гласная. В первом случае 14^6. Во втором случае можно сначала выбрать гласную (5 вариантов), найти для нее место (6 вариантов), а затем на оставшиеся места ставить символы: $5 \cdot 6 \cdot 14^5 = 30 \cdot 14^5$.

Ответ: $14^6 + 30 \cdot 14^5 = 44 \cdot 14^5$.

10) Фраза, состоящая из трех слов, каждое из которых имеет 5 букв.

Решение. Число пятибуквенных слов — 15^5. Число последовательностей (фраз) длины 3 из этого запаса: $15^5 \cdot 15^5 \cdot 15^5 = 15^{15}$.

Ответ: 15^{15}.

В задаче 4.25 речь идет о шестизначных числах без оговорки о первой цифре, следовательно, она должна быть отлична от нуля.

4.25. Сколько существует шестизначных чисел:

1) оканчивающихся на нечетную цифру:

$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 45 \cdot 10^4$;

2) не содержащих в записи цифр «5» и «9»:

$7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 7 \cdot 8^5$;

3) содержащих ровно 2 нуля.

Решение. Надо выбрать 2 места (из 5 возможных), где будут стоять нули. Выбор пары должен быть отработан заранее.

Ответ: $\dfrac{5 \cdot 4}{2} \cdot 9^4 = 10 \cdot 9^4$;

4) содержащих хотя бы 2 нуля.

Решение. С выражением «хотя бы» работать трудно. Легче всего от общего количества отнять число вариантов, когда нет нулей или один нуль: общее количество : $9 \cdot 10^5$; нет нулей: 9^6; один нуль (сначала выбираем его место): $5 \cdot 9^5$.

Ответ: $9 \cdot 10^5 - 9^6 - 5 \cdot 9^5 = 9 \cdot 10^5 - 6 \cdot 9^5$;

5) содержащих хотя бы 2 цифры «6».

Решение. Разница с предыдущим: раньше нуль не мог стоять на первом месте, а шестерка может.

Ответ: $9 \cdot 10^5 - 8 \cdot 9^5 - 9^5 - 5 \cdot 9^5 = 9 \cdot 10^5 - 14 \cdot 9^5$ (9^5 — когда шестерка на первом месте; $5 \cdot 9^5$ — когда не на первом);

6) начинающихся двумя одинаковыми цифрами.

Указание. Эта цифра не может быть нулем.

Ответ: $9 \cdot 10^4$;

7) содержащих в записи только четные цифры.

Ответ: $4 \cdot 5^5$.

4.66. Сколькими способами можно поставить 8 ладей на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

Решение. В каждой колонке будет отмечена ровно одна клетка. Номера рядов этих клеток должны быть различны.

Ответ: 8!

4.70. Сколькими способами можно выбрать из колоды в 36 карт последовательность из четырех карт различных мастей и достоинства?

Решение. Обратите внимание — речь идет не о наборе из четырех карт, а о последовательности. Карты различны, поэтому эти числа будут отличаться друг от друга множителем $4! = 24$. Так как число карт и число мастей совпадают, то нужно думать только о том, как указать 4 разных достоинства из 9 возможных.

Получаем: $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} \cdot 4! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. Можно провести и другое рассуждение, сразу получив размещения.

4.95. Каким числом способов можно выбрать две диагонали граней куба, не лежащие в параллельных плоскостях?

Решение. В формулировке задачи есть недосказанность. Если речь идет о любых непараллельных плоскостях, то любые две непересекающиеся прямые можно разместить в двух параллельных плоскостях. Конечно, речь идет о непараллельных гранях куба. Граней у куба 6, диагоналей граней 12. Для одной диагонали есть 4 грани, не параллельные той, в которой она лежит. В них 8 диагоналей. Число $12 \cdot 8$ надо еще поделить пополам, так как каждую пару мы выбираем дважды.

Ответ: 48.

ГЛАВА 5
КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

Содержание темы

Прямоугольная (декартова) система координат в пространстве. Формула расстояния между двумя точками. Уравнения сферы, *плоскости* и *прямой*.

Векторы. Модуль вектора. Равенство векторов. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора по направлениям. Угол между двумя векторами. Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов.

Требования к результатам обучения

В результате освоения данной темы обучающийся должен *уметь* использовать координаты и векторы при решении математических и прикладных задач.

Примерное поурочное планирование

Содержание темы	Количество часов на тему (вариант программы)				
	20 (1)	8 (2)	24 (3)	24 (4)	6 (5)
Повторение пройденного	6	4	8	8	2
Координаты и векторы в пространстве	4	1	4	4	1
Скалярное произведение	5	1	5	5	1
Перпендикулярность прямых и плоскостей	4	1	4	4	1
Беседа	—	—	1	1	—
Контроль усвоения	1	1	2	2	1

Прикладная важность темы «Координаты и векторы» существенно зависит от профилизации обучения. Для вариантов 2 и 5 календарного планирования, предназначенных для «нетехнических» профилей, достаточно ограничиться повторением того запаса знаний о координатах и векторах, который получен в основной школе, с добавлением возможности перехода от плоскости к пространству.

Для вариантов 1, 3 и 4 приобретает важное значение использование векторов для доказательства фактов о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве (типичный пример — теоремы о двух и трех перпендикулярах). Курс не предполагает развития аналитической геометрии, часто включающейся в программы для учебных заведений НПО. Для изучения методов аналитической геометрии нужны дополнительные часы.

Разложение по векторам

Повторить правила разложения:
M — середина отрезка AB.

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$;

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$;

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$.

Задача. В пространстве даны 4 точки — A, B, C и D. Строятся точки: K — середина AB; L — середина KC; M — середина LD. Разложить вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

При решении можно обойтись без чертежа.

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AC}}{2}+\overrightarrow{AD}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\overrightarrow{AB}}{2}+\overrightarrow{AC}}{2}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

Действия над векторами в координатах

Тренировка в вычислениях. Даны координаты векторов **a**(1; –3; 0), **b**(–2; 1; –4), **c**(3; –5; 2).

а) Найти координаты вектора $\mathbf{d}=2\mathbf{a}-\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c}$.

Решение. $x_d=2x_a-x_b+\frac{1}{2}x_c=2+2+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$;

$y_d=2y_a-y_b+\frac{1}{2}y_c=-6-1-3=-10$;

$z_d=2z_a-z_b+\frac{1}{2}z_c=0+4+1=5$.

б) Найти скалярное произведение $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})$.

Сначала находим координаты векторов $\mathbf{d}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ и $\mathbf{e}=\mathbf{b}-\mathbf{c}$: **d**(–1; –2; –4); **e**(–5; –5; –6).

Составляем скалярное произведение: $\mathbf{d}\cdot\mathbf{e} = (-1)\cdot(-5) + (-2)\cdot(-5) + (-4)\cdot(-6) = 5 + 10 + 24 = 39$.

в) Найти длину вектора $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ и угол, который он составляет с вектором $\mathbf{a}$.

Находим координаты вектора $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$:

$\mathbf{d}(2; 4; -2)$; $|\mathbf{d}| = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

$$\cos(\mathbf{d}, \mathbf{a})\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{d}|\cdot|\mathbf{a}|} = \frac{2\cdot1+4\cdot(-3)+0}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}} = \frac{-10}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}} =$$

$$= -\frac{10}{2\cdot2\sqrt{15}} = -\frac{2\cdot5\sqrt{15}}{2\cdot2\cdot3\cdot5} = -\frac{\sqrt{15}}{6}.$$

■ Переход от координат точек к координатам векторов

Даны точки $A(1; -4; 2)$, $B(-2; 0; -3)$, $C(4; 2; 0)$.

а) Вычислить длины сторон треугольника ABC.

Решение. $\overline{AB}(-3;4;-5)$; $|\overline{AB}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$;

$\overline{BC}(6;2;3)$; $|\overline{BC}| = \sqrt{49} = 7$; $\overline{CA}(-3;-6;2)$; $|\overline{CA}| = \sqrt{49} = 7$.

б) Вычислить высоту CH треугольника ABC.

Решение.

Так как $|\overline{CA}| = |\overline{CB}|$, то треугольник ABC равнобедренный с вершиной C; H — середина AB; $\overline{CH} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB}) = \frac{1}{2}(-9;-8;-1)$; $|CH| = \frac{1}{2}\sqrt{146}$.

Можно найти площадь S треугольника ABC:

$$S = \frac{1}{2}|AB|\cdot|CH| = \frac{1}{2}\cdot5\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{73} = \frac{5}{2}\sqrt{73}.$$

в) Проверить, что $CH \perp AB$.

Решение. $\overline{CH}\cdot\overline{AB} = (-9;-8;-1)\cdot(-3;4;-5) = 27 - 32 + 5 = 0$.

Рекомендации по решению задач

■ Задание точек координатами

Полезно повторить и закрепить значение модуля разности $|x - y|$ как расстояния между точками на числовой прямой с координатами x и y.

5.2. Запишите в виде равенств или неравенств соотношения между координатами заданных точек.

1. На координатной оси Ox:

а) точки, удаленные от $P(-3)$ на расстояние 4.

Решение. Пусть x — координата искомой точки. Тогда выражение $|x - 3| = 4$ означает, что точка с координатой x находится на расстоянии 4 от точки $P(-3)$;

б) точка, симметричная точке $A(2)$ относительно точки $B(8)$.

Решение. Точка $A(2)$ находится слева от точки $B(8)$, следовательно, симметричная точка будет находиться справа, т. е. $|x - 8| = 6$;

в) точка, делящая отрезок [2, 5] в соотношении 1 : 2.

Решение. Пусть x — координата искомой точки. Тогда $x - 2$ и $5 - x$ — расстояния до концов отрезка. По условию имеем $\dfrac{x-2}{5-x} = \dfrac{1}{2}$;

г) точки, отстоящие от точек отрезка [2, 5] не более чем на 3.

Решение.

$$\begin{cases} |x-2| \le 3, \\ |x-5| \le 3. \end{cases}$$

3. В координатном пространстве $(x;\, y;\, z)$.

В координатном пространстве $(x;\, y;\, z)$ расстояние между точками $P(x_1, y_1, z_1)$ и $Q(x_2, y_2, z_2)$ вычисляется по формуле

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

а) Точки, равноудаленные от осей Ox и Oy.

Решение. Расстояние от точки $P(x, y, z)$ до оси Ox равно $\sqrt{y^2 + z^2}$.

Аналогично расстояние до оси Oy равно $\sqrt{x^2 + z^2}$, следовательно, $\sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{y^2 + z^2} \Leftrightarrow x^2 + z^2 = y^2 + z^2 \Leftrightarrow y = \pm x$, x и z — любые. Таким свойством обладают точки $P(x, \pm x, z)$.

б) Точки, расстояние от которых до точки $P(1; -3; 0)$ равно 1.

Решение. Расстояние между точками $Q(x, y, z)$ и $P(1; -3; 0)$ равно $\sqrt{(x-1)^2 + (y-(-3))^2 + (z-0)^2} = 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 1$.

Таким свойством обладают точки, лежащие на сфере с центром в точке P и радиусом, равным 1.

в) Точки, равноудаленные от точек $P(-1; -3; 1)$ и $Q(2; 2; 2)$.

Решение. $(x+1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=(x-2)^2+(y-2)^2+$ $+(z-2)^2 \Leftrightarrow 6x+10y+2z-1=0$.

Таким свойством обладают точки, лежащие на прямой, проходящей через середину отрезка PQ, перпендикулярно этому отрезку, следовательно, $6x+10y+2z-1=0$ — уравнение этой плоскости.

г) точки, отстоящие от оси Oy на расстояние 6.

Решение. $x^2+z^2=36$.

$\sqrt{x^2+z^2}=6 \Leftrightarrow x^2+z^2=36$. Таким свойством обладают точки цилиндрической поверхности, осью которой является ось Oy. Мы получили уравнение такой поверхности.

■ Действия над векторами и их координатами

Все задачи этого раздела простые, но являются основой для решения более содержательных задач с векторами. В них требуется вычислить координаты вектора по координатам его начала и конца, найти длину вектора по его координатам, выразить одни векторы через другие.

5.9.

В

1. Докажите, что точки $A(1;\ 1;\ 2)$, $B(4;\ 5;\ -8)$, $C(2;\ -1;\ 0)$ и $D(-1;\ -5;\ 10)$ являются вершинами параллелограмма.

Решение. Нужно доказать, что противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ равны и параллельны. Вычисляем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{AB}=(3, 4, -10)$, $\overrightarrow{CD}=(-3, -4, 10)$. Видим, что векторы отличаются только направлением, а значит, они параллельны и их длины равны.

2. Выразите вектор $\overrightarrow{DC}$ через векторы $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{OD}$, где O — точка пересечения диагоналей параллелограмма.

Решение. Так как $\overrightarrow{BC}$ соединяет концы векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, то $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$. Но $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}=-\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}=-\mathbf{b}$, следовательно, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$.

Ответ: $\mathbf{b}-\mathbf{a}$.

3. Вычислите сумму квадратов диагоналей параллелограмма.

Решение.

$\overline{AC} = (1, -2, -2) \Rightarrow \left|\overline{AC}\right|^2 = 9;\ \overline{BD} = (-5, -10, 18) \Rightarrow \left|\overline{BD}\right|^2 = 449;$

$\left|\overline{AC}\right|^2 + \left|\overline{BD}\right|^2 = 458.$

Ответ: 458.

5.11. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ $\overline{AB} = \mathbf{p}$, $\overline{BC} = \mathbf{q}$. Выразите через векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ векторы $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ и $\overline{AE}$.

Решение. Пусть O — центр шестиугольника.

$\overline{AO} = \overline{BC} = \mathbf{q};\ \overline{CD} = \overline{BO} = \mathbf{q} - \mathbf{p};\ \overline{AD} = 2\overline{AO} = 2\mathbf{q};\ \overline{AC} = \mathbf{p} + \mathbf{q};$

$\overline{AE} = \overline{BD} = \mathbf{q} + (\mathbf{q} - \mathbf{p}) = 2\mathbf{q} - \mathbf{p};\ \overline{FA} = -\overline{BO} = \mathbf{p} - \mathbf{q};\ \overline{EF} = -\mathbf{q};$

$\overline{DE} = -\mathbf{p}.$

■ Решение простейших геометрических задач

5.13. Определите координаты вершин треугольника ABC, если середины его сторон имеют координаты $K(-4; 2)$, $L(1; 6)$, $M(-3; 2)$. Найдите длину медианы AK.

Решение. По условию $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_K = -8, \\ x_B + x_C = 2x_L = 2, \\ x_A + x_C = 2x_M = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = -8, \\ x_B = 0, \\ x_C = 2. \end{cases}$

Аналогично $\begin{cases} y_A + y_B = 2y_K = 4, \\ y_B + y_C = 2y_L = 12, \\ y_A + y_C = 2y_M = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A = -2, \\ y_B = 6, \\ y_C = 6. \end{cases}$

$|AK| = \sqrt{(-4+8)^2 + (2+2)^2} = 4\sqrt{2}.$

5.14. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-2; 2)$ и $B(2; 5)$ и точка пересечения диагоналей $K(0; 6)$. Найдите остальные вершины параллелограмма.

Решение. Имеем $x_C + x_A = 2x_K \Rightarrow x_C = 2x_K - x_A$; аналогично находим $y_C = 2y_K - y_A$ и x_D, y_D.

5.18. Даны две точки $A(4; -2; 2)$ и $B(7; -6; 4)$. Через точку B проведена прямая, параллельная вектору $\overrightarrow{OA}$, где O — начало координат. Найдите точку пересечения этой прямой с координатной плоскостью xOy.

Решение. Пусть $C(x; y; 0)$ — искомая точка;

$$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{OA} \Rightarrow \frac{x-7}{4} = \frac{y+6}{-2} = \frac{0-4}{2} \Rightarrow x = -1;\ y = -2.$$

■ Скалярное произведение векторов

5.22. Найдите координаты вектора **x**, коллинеарного вектору **a** $(3; 0; -2)$ и удовлетворяющего условию $\mathbf{xa} = 39$.

Решение. По условию $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} \Rightarrow \lambda\mathbf{a}^2 = 39$, $\mathbf{a}^2 = 13 \Rightarrow \lambda = \dfrac{39}{13} =$
$= 3 \Rightarrow \mathbf{x}(9; 0; -6)$.

Ответ: $\mathbf{x}(9; 0; -6)$.

5.25. Заданы вершины треугольника $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -1; 2)$ и $C(-5; 6; -4)$. Найдите длину высоты BD.

Решение. Пусть $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, $|\overrightarrow{AB}| = a$, $|\overrightarrow{AC}| = b$. Угол α между сторонами AB и AC вычисляем по формуле $\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{ab}}{ab}$, где $\mathbf{a} = (-3, 1, -2)$, $\mathbf{b} = (-4, 8, -8)$, $a = \sqrt{14}$, $b = 12$.

Тогда площадь треугольника можно вычислить двумя способами: $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\alpha$ и $S = \dfrac{1}{2}|AC| \cdot |BD| \Rightarrow |BD| = \dfrac{ab\sin\alpha}{b} = a\sin\alpha$. Далее вычисляем: $\cos\alpha = \dfrac{12+8+16}{12 \cdot \sqrt{14}} = \dfrac{3}{\sqrt{14}}$, $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{5}{14}} \Rightarrow |BD| = \sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

■ Уравнение прямой и плоскости

Во всех задачах этого раздела требуется понимание обучающимися геометрического смысла коэффициентов в уравнении плоскости, а также, что нужно задать, чтобы плоскость была определена (три точки, нормаль к плоскости и точку и т. д.), и постараться из условия задачи эти данные получить.

5.30. Запишите уравнение плоскости по следующим данным.

1) Плоскость проходит через точку $P(7; 2; 4)$ и параллельна плоскости xOy.

Решение. У искомой плоскости и плоскости xOy одинаковые нормали, поэтому в качестве одной из них можно взять единичный вектор $\mathbf{k} = (0; 0; 1)$. Известна точка, лежащая на плоскости, поэтому можно воспользоваться уравнением плоскости $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, где A, B, C — координаты вектора нормали, а (x_0, y_0, z_0) — координаты точки P. Получим: $0\cdot(x - 7) + 0\cdot(y - 2) + 1\cdot(z - 4) = 0 \Rightarrow z = 4$.

Указание. Следует обратить внимание, что ответ можно было написать сразу, так как те и только те точки принадлежат плоскости, которые имеют координаты $(0; 0; 4)$.

Ответ: $z = 4$.

2) Плоскость проходит через точку $P(2; -1; 7)$ и параллельна плоскости xOz.

Решается аналогично.

Ответ: $y = -1$.

3) Плоскость проходит через три точки $O(0; 1; 2)$, $P(-1; -1; 1)$ и $Q(1; -3; 2)$.

Решение. Построим векторы: $\overline{OP} = \mathbf{a}$ и $\overline{OQ} = \mathbf{b}$. Тогда $\mathbf{a} = (-1; -2; -1)$, $\mathbf{b} = (1; -4; 0)$. Обозначим вектор нормали $\mathbf{n} = (A; B; C)$.

Так как $\mathbf{n}\perp\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}\perp\mathbf{b}$, то $\begin{cases}(\mathbf{n}, \mathbf{a}) = 0,\\ (\mathbf{n}, \mathbf{b}) = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-A - 2B - C = 0,\\ A - 4B = 0\end{cases} \Rightarrow A = 4B,$

$C = -6B \Rightarrow \mathbf{n} = (4B; B; -6B)$.

Сокращаем на B и выберем, например, точку $O(0; 1; 2)$, получим уравнение плоскости: $4x + y - 1 - 6(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 4x + y - 6z + 11 = 0$.

Ответ: $4x + y - 6z + 11 = 0$.

5.31. Дан треугольник с вершинами $A(2; 4)$, $B(2; 7)$ и $C(6; 4)$. Найдите:

1) координаты центра вписанной окружности.

Решение. Центр P вписанной окружности равноудален от сторон треугольника, значит, совпадает с точкой пересечения биссектрис. Найдем уравнения биссектрис AK и BM. Стороны AC и AB параллельны осям Ox и Oy, поэтому уравнение AK: $y - 4 = x - 2 \Rightarrow y = x + 2$.

Далее, уравнение BC: $\dfrac{x-2}{6-2}=\dfrac{y-7}{4-7} \Rightarrow 3x+4y-34=0$.

Решаем систему $\begin{cases} y=x+2, \\ 3x+4y-34=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_P=\dfrac{26}{7}, \\ y_P=\dfrac{40}{7}. \end{cases}$

Ответ: $\left(\dfrac{26}{7}; \dfrac{40}{7}\right)$;

2) координаты центра описанной окружности.

Решение. Треугольник прямоугольный, поэтому центр Q описанной окружности совпадает с серединой гипотенузы BC:

$x_Q=\dfrac{1}{2}(x_B+x_C)=4,\ \ y_Q=\dfrac{1}{2}(y_B+y_C)=5{,}5$.

Ответ: $Q(4;\ 5{,}5)$;

3) уравнение высоты (биссектрисы, медианы), опущенной из вершины A.

Решение. Уравнение медианы находим по двум точкам A и Q: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{1{,}5} \Leftrightarrow 3y-4y+10=0$; уравнение биссектрисы — по точкам A и P: $\dfrac{y-4}{\dfrac{12}{7}}=\dfrac{x-2}{\dfrac{12}{7}} \Leftrightarrow x-y+2=0$; уравнение высоты — по точке A и угловому коэффициенту $k=-\dfrac{1}{k_{BC}}=\dfrac{4}{3}$: $y-4=\dfrac{4}{3}(x-2) \Leftrightarrow 4x-3y+4=0$.

Ответ: $4x-3y+4=0$ ($x-y+2=0$; $3x-4y+10=0$).

■ Векторные уравнения прямой и плоскости

5.32. Даны точки $A(2;\ 1;\ 0)$, $B(0;\ -2;\ 1)$, $C(1;\ 1;\ 1)$.

1) Напишите координаты направляющих векторов прямых AB, BC и AC.

Ответ: $\overrightarrow{AB}=(-2;-3;1)$; $\overrightarrow{BC}=(1;3;0)$; $\overrightarrow{AC}=(-1;0;1)$.

2) Напишите векторное уравнение прямой l, параллельной AB и проходящей через точку $P_0(2;\ 3;\ 4)$.

Решение. Пусть $P(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка на прямой, $\mathbf{r}=\overrightarrow{OP}$, $\mathbf{r}_0=\overrightarrow{OP_0}$, $\mathbf{q}=\overrightarrow{AB}$.

Тогда вектор $\overline{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и $\overline{P_0P} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \overline{P_0P} = t\overline{AB} \Leftrightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{q}$, $-\infty < t < +\infty$.

Ответ: $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{q}$, $-\infty < t < +\infty$.

3) Напишите векторное уравнение плоскости m, перпендикулярной AB и проходящей через точку $P_0(2;\ 3;\ 4)$.

Решение. $\overline{P_0P} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{q} = 0$.

Ответ: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{q} = 0$.

4) Найдите точки пересечения l с координатными плоскостями.

Решение. Уравнение l в координатной форме можно записать так: $\begin{cases} x-2=-2t, \\ y-3=-3t, \\ z-4=t. \end{cases}$ Подставляя по очереди $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$, находим точки пересечения: $(0;\ 0;\ 5)$ — с плоскостями zOy и zOx, $(10;\ 15;\ 0)$ — с плоскостью xOy.

Ответ: $(0;\ 0;\ 5)$ и $(10;\ 15;\ 0)$.

5) Запишите уравнения плоскостей ABC, BCO.

Ответ: $3x - y + 3z - 5 = 0$; $3x - y - 2z = 0$.

6) Запишите уравнения плоскости, проходящей через точку $A(2;\ -4;\ 1)$ и параллельной плоскости $x + y - z + 2 = 0$.

Ответ: $x + y - z + 3 = 0$.

7) Найдите векторное уравнение прямой, по которой пересекаются плоскости $2x - 3y + z = 0$ и $2x + 3y - 4z - 1 = 0$.

Решение. Зададим два любых значения z, например $z = 0$ и $z = 1$, и найдем две точки M и N на прямой $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ 2x+3y=1 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)$; $\begin{cases} 2x-3y=-1, \\ 2x+3y=5 \end{cases} \Rightarrow N(1;1)$. Получаем векторное уравнение прямой:

$\overline{MP} = t\overline{MN}$, где $\overline{MP} = \left(x-\frac{1}{4};y-\frac{1}{6};z\right)$; $\overline{MN} = \left(\frac{3}{4};\frac{5}{6};1\right)$.

5.33. Дан тетраэдр с вершинами $P(1;\ 2;\ 3)$, $A(2;\ 1;\ 0)$, $B(4;\ 2;\ 0)$, $C(0;\ 3;\ 3)$. Найдите:

1) уравнение плоскости APC.

Решение. Мы уже несколько раз записывали уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, при этом мы строили два вектора, коллинеарных плоскости, и находили координаты нормали из условия ортогональности (перпендикулярности) нормали этим векторам. Затем записывали уравнение плоскости, выбрав любую из данных точек: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Можно поступить иначе. Напишем уравнение $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, выбрав, например, точку P, и подставим в него координаты точек A и C: $\begin{cases} a - b - 3c = 0, \\ -a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b, \\ c + 0. \end{cases}$ Получим уравнение $a(x - 1) + a(y - 2) = 0$, которое после сокращения на a примет вид: $x + y - 3 = 0$.

Указание. Полезно отметить, что уравнение плоскости $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ означает, что точка $M(x, y, z)$ тогда и только тогда принадлежит плоскости, если вектор нормали $\mathbf{n} = (a, b, c)$ ортогонален вектору $\overrightarrow{PM} = (x - 1, y - 2, z - 3)$.

Ответ: $x + y - 3 = 0$;

2) уравнение плоскости, проходящей через вершину P параллельно основанию ABC.

Решение. Уравнение плоскости ABC получим аналогично APC: $x - 2y + 2z = 0$. Искомая плоскость параллельна ABC, поэтому в качестве нормали можно взять вектор $\mathbf{n} = (1, -2, 2)$ и уравнение плоскости записать, используя координаты точки P: $(x - 1) - 2(y - 2) + 2(z - 3) = 0 \Rightarrow x - 2y + 2z - 9 = 0$.

Ответ: $x - 2y + 2z - 9 = 0$;

3) уравнение плоскости, проходящей через вершину A перпендикулярно ребру PC.

Решение. $\overrightarrow{PC} = (-1; 1; 0) \Rightarrow -(x - 2) + (y - 1) + (z - 0) = 0 \Rightarrow x - y - z - 1 = 0$.

Ответ: $x - y - z - 1 = 0$;

4) координаты точки основания, в которую проецируется вершина P.

Решение. Найдем уравнение прямой PK, перпендикулярной ABC и проходящей через P. Направляющий вектор прямой получаем из уравнения плоскости ABC: $(1; -2; 2)$.

Напишем векторное уравнение прямой: $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{q}$, $-\infty < t < +\infty$, где $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP} = (1; 2; 3)$, $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, $M(x, y, z)$ — произвольная точка прямой PK, $\mathbf{q} = (1; -2; 2)$.

В координатной форме уравнение примет вид: $x = 1 + t$; $y = 2 - 2t$; $z = 3 + 2t$. Подставим эти выражения в уравнение плоскости ABC и найдем $t = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3};\ y = \frac{4}{3};\ z = \frac{11}{3}$.

Ответ: $\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{11}{3}\right)$;

5) координаты центра шара, описанного около тетраэдра.

Решение. $|PO| = |AO|$; $|PO| = |BO|$; $|PO| = |CO|$. Запишем эти равенства в координатной форме и после упрощений получим систему трех линейных уравнений. Решение системы дает искомую точку $O\left(\frac{11}{6}; \frac{23}{6}; \frac{5}{6}\right)$.

Ответ: $O\left(\frac{11}{6}; \frac{23}{6}; \frac{5}{6}\right)$;

6) уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек P и C.

Решение. Уравнение получается из условия $|PM| = |PC|$. Отсюда $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-0)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 \Rightarrow x - y + 2 = 0$.

Ответ: $x - y + 2 = 0$.

Указание. Мы получили уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка PC и перпендикулярной этому отрезку;

7) уравнение сферы, описанной вокруг тетраэдра.

Решение. Из 5) находим радиус сферы: $|PO| = \frac{\sqrt{35}}{2}$.

Уравнение сферы $\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{23}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{35}{4}$.

Ответ: $\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{23}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{35}{4}$;

8) уравнение плоскости, проходящей через точку (1; 2; 8) и параллельной ребрам PA и BC.

Решение. Уравнение плоскости ищем в виде: $a(x-1) + b(y-2) + c(z-8) = 0$. Вектор нормали $\mathbf{n} = (a; b; c)$ перпендикулярен векторам $\overline{PA}$, $\overline{BC}$. Значит, $\overline{PA} \cdot \mathbf{n} = 0$; $\overline{BC} \cdot \mathbf{n} = 0$. Получаем систему $\begin{cases} a - b - 3c = 0, \\ -4a + b + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0,\ b = -3c$. Сократив на c, получим $3y - z + 2 = 0$.

Ответ: $3y - z + 2 = 0$.

ГЛАВА 6
ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Содержание темы

Радианная мера угла. Вращательное движение. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа. Основные тригонометрические тождества, формулы приведения. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов. Синус и косинус двойного угла. *Формулы половинного угла. Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента.* Преобразования простейших тригонометрических выражений.

Простейшие тригонометрические уравнения. Решение тригонометрических уравнений. *Простейшие тригонометрические неравенства. Арксинус, арккосинус, арктангенс угла.*

Требования к результатам обучения

В результате освоения данной темы обучающийся должен *уметь*:

- находить значения тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
- выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами тригонометрических функций;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

- для практических расчетов по формулам, включая формулы, содержащие тригонометрические функции, применяя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства.

Примерное поурочное планирование

Содержание темы	Количество часов на тему (вариант программы)				
	32 (1)	14 (2)	40 (3)	44 (4)	12 (5)
Углы и вращательное движение	5	2	6	6	2
Тригонометрические операции	6	3	7	8	2
Преобразование тригонометрических выражений	6	2	8	8	2
Тригонометрические функции	6	3	6	8	2

Содержание темы	Количество часов на тему (вариант программы)				
	32 (1)	14 (2)	40 (3)	44 (4)	12 (5)
Тригонометрические уравнения	6	2	8	9	2
Беседа	—	—	1	1	—
Контроль усвоения	3	2	4	4	2

Стандартная программа разделяет «алгебраическую» и «функциональную» линии в изучении тригонометрии. На практике полное разделение этих линий вряд ли целесообразно — основные свойства синуса, косинуса, тангенса, котангенса (значения, знаки, неравенства, соотношения между ними) имеют явно выраженный «функциональный» смысл, но изучаются всегда сразу вслед за определением тригонометрических операций. В то же время есть смысл при преобразованиях тригонометрических выражений обращать внимание на алгебраическую природу (вывод «условных» тождеств).

В вариантах, предусматривающих значительное сокращение часов на тригонометрию, следует свести формирование умений выполнять преобразования и решать уравнения к уровню ознакомительного опыта.

Рекомендации по подготовке к контрольной работе

■ Связь между значениями тригонометрических функций

1) Провести тренажер: зная значение одной функции и имея сведения об угле, найти значения остальных.

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$; $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$.

Проверяем, что знак синуса указан верно: α лежит во второй четверти.

Вычисляем $|\cos\alpha| = \sqrt{1 - \frac{11}{36}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$.

Находим знак косинуса и выписываем его значение: $\cos\alpha < 0$, $\cos\alpha = -\frac{5}{6}$.

Находим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{11}}{5}$;

$\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{5}{\sqrt{11}} = -\frac{5\sqrt{11}}{11}$.

2) Повторить формулы сложения и удвоения.
Вычислить значения функций для 2α:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{5\sqrt{11}}{18};\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$$

$$= \frac{25}{36} - \frac{11}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18};$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{5\sqrt{11}}{7};\ \operatorname{ctg}2\alpha = -\frac{7\sqrt{11}}{55}.$$

Дополнительный вопрос: в какой четверти лежит угол 2α?

Так как α лежит во второй четверти, то 2α лежит в третьей или четвертой четверти. Выбор между ними можно определить по знаку косинуса: так как $\cos 2\alpha = \frac{7}{18} > 0$, то 2α попадает в четвертую четверть. Обратить внимание на то, что по знаку $\sin 2\alpha$ определить четверть было невозможно.

▪ Преобразование тригонометрических выражений

Упростить $\dfrac{\sin\alpha - \cos\frac{\alpha}{2}}{1 - \cos\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}}$.

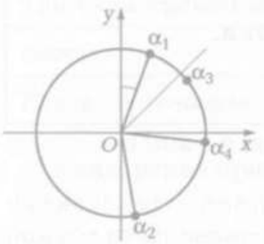
Сначала заметить, что после использования формул удвоения числитель и знаменатель разложатся на множители.

$$\frac{\sin\alpha - \cos\frac{\alpha}{2}}{1 - \cos\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\left(2\sin\frac{\alpha}{2} - 1\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\sin\frac{\alpha}{2} - 1\right)} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Сравнение значений тригонометрической функции для различных значений аргумента

Провести тренажер: нанести на тригонометрический круг точки, соответствующие значениям угла, записанным в разной форме: $\alpha = 70°$; $640°$; $\frac{3\pi}{16}$; $6{,}2$.



$\alpha_1 = 70°$; острый угол с осью Oy равен $20°$;

$\alpha_2 = 640°$; острый угол с осью Oy равен $10°$;

$\alpha_3 = \frac{3\pi}{16} < \frac{4\pi}{16} = \frac{\pi}{4}$;

$\alpha_4 = 6{,}2 < 2\pi$, но очень близок к точке 2π.

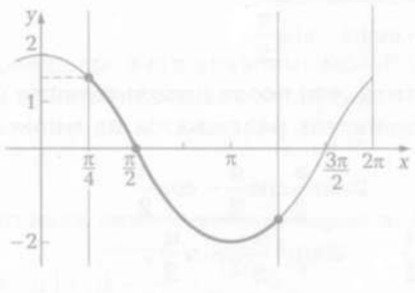
На основе такого тренажера дать задание сравнения значений синуса или косинуса.

В приведенном примере значения $\cos\alpha$ для выбранных углов сравниваются по проекциям на ось Ox.

Из вычислений ясно, что $\cos\alpha_2 < \cos\alpha_1 < \cos\alpha_3 < \cos\alpha_4$.

Исследование тригонометрической функции на отрезке

Построить на доске график функции $y = 2\cos x$, выбрать отрезок, например $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$, и провести исследование функции по графику.



Количество корней уравнения $2\cos x = a$ на данном отрезке: $a < -2$ — корней нет; $a = -2$ — один корень; $-2 < a \le -\sqrt{2}$ — два корня; $-\sqrt{2} < a \le \sqrt{2}$ — один корень; $\sqrt{2} < a$ — корней нет.

Число $\sqrt{2}$ — это значение функции $y = 2\cos x$ при $x = \frac{\pi}{4}$.

■ Решение уравнений

Повторить запись множества решений стандартных уравнений типа $\sin 2x = -\frac{1}{2}$; $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$.

Провести тренировку по решению уравнений, сводящихся к стандартным с помощью перехода к алгебраическому уравнению (линейному или квадратному) относительно какой-либо тригонометрической функции.

Обратить внимание на распадающиеся уравнения, т. е. такие, которые записываются в виде $f(x)g(x) = 0$.

Рекомендации по решению задач

■ Углы и вращательное движение

6.3. Определите, в какой четверти лежит данный угол. Укажите знак sin, cos, tg, ctg этого угла.

Для выполнения заданий применяем свойство: каждой точке на тригонометрической окружности соответствует бесконечное множество чисел, удовлетворяющих формуле $\alpha + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, α — одно из них, $2\pi = 360° = 6{,}28...$ Поэтому чтобы определить четверть, в которой лежит угол, больший по модулю 360° (2π; 6,28...), к данному углу прибавляем или отнимаем $360°k$, $k \in \mathbf{Z}$. Учитываем, что границы между четвертями можно выразить в градусной или радианной мере — через доли π или десятичные дроби:

$90° = \frac{\pi}{2} = 1{,}57\ldots(+2\pi k)$;

$180° = \pi = 3{,}14\ldots(+2\pi k)$;

$270° = \frac{3\pi}{2} = 4{,}71\ldots(+2\pi k)$;

$360° = 2\pi = 6{,}28\ (+2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Рассмотрим решение нескольких примеров.

А

9) $-415°$.

Решение. Точка на единичной окружности, обозначающая угол, равный $-415°$, совпадает с точкой, обозначающей угол $-415° + 720° = 305°$ — IV четверть.

10) $-520°$.

Решение. Аналогично. Рассматриваем угол $-520° + 720° = 200°$ — III четверть.

Б

2) $-\frac{9\pi}{17}$.

Решение. $\frac{9\pi}{17} > \frac{\pi}{2} > \frac{8,5\pi}{17}$, тогда $-\frac{9\pi}{17}$ — III четверть.

5) $\frac{31\pi}{21}$.

Решение. $\frac{31\pi}{21} = \pi + \frac{10\pi}{21}$, $\frac{10\pi}{21} < \frac{\pi}{2} < \frac{10,5\pi}{21}$, $\frac{31\pi}{21}$ — III четверть.

7) $-\frac{23\pi}{6}$.

Решение. Рассматриваем угол $-\frac{23\pi}{6} + 4\pi = \frac{\pi}{6}$ — I четверть.

10) $-\frac{39\pi}{5}$.

Решение. Рассматриваем угол $-\frac{39\pi}{5} + 8\pi = \frac{\pi}{5}$ — I четверть.

В

6) 8.

Решение. Рассматриваем угол $8 - 6,28... = 1,7... > 1,57...$ — II четверть.

7) $-7,5$.

Решение. Рассматриваем угол $-7,5 + 2\pi = -1,2... > -1,57...$ — IV четверть.

9) 15.

Решение. Рассматриваем угол $15 - 4\pi = 2,4... < 3,14...$ — II четверть.

10) -31.

Решение. Рассматриваем угол $-31 + 10\pi = -31 + 31,4... = 0,4...$ — I четверть.

6.4. Вычислите значение выражения.

В

1) $\log_2\left(\text{tg}\dfrac{\pi}{180}\right)\cdot\log_3\left(\text{tg}\dfrac{2\pi}{180}\right)\cdot\log_4\left(\text{tg}\dfrac{3\pi}{180}\right)\cdot\ldots\cdot\log_{90}\left(\text{tg}\dfrac{89\pi}{180}\right)$;

2) $\left(\lg(\text{tg}46°)-\dfrac{1}{2}\lg3\right)\cdot\left(\lg(\text{tg}47°)-\dfrac{1}{2}\lg3\right)\cdot\ldots\cdot\left(\lg(\text{tg}89°)-\dfrac{1}{2}\lg3\right)$;

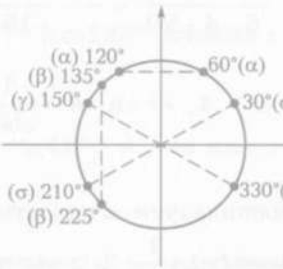
3) $(1+\log_2\sin1°)(1+\log_2\sin2°)\cdot\ldots\cdot(1+\log_2\sin89°)$;

8) $(2\sin1°-1)(2\sin2°-1)\cdot\ldots\cdot(2\sin90°-1)$.

Указание. В заданиях 1) — 3), 8) среди множителей есть один, равный нулю.

4) числа α, β, γ, δ принадлежат промежутку $[0; 2\pi]$; $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg}\gamma=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\text{ctg}\delta=\sqrt{3}$; $\sigma=\alpha+\beta+\gamma+\delta$. Найдите $\sigma_{\text{наим}}$ и $\sigma_{\text{наиб}}$.

Решение. Ответить на вопрос будет легче, если точки изобразить на круге.



Составляем $\sigma_{\text{наим}}=\alpha+\beta+\gamma+\delta=60°+30°+135°+150°=375°$.

$\sigma_{\text{наиб}}=120°+225°+330°+210°=885°$.

5) $\dfrac{\sin1°\cdot\sin2°\cdot\ldots\cdot\sin90°}{\sin91°\cdot\sin92°\cdot\ldots\cdot\sin179°}$;

6) $\text{tg}1°\cdot\text{tg}2°\cdot\ldots\cdot\text{tg}89°$.

Указание. После применения формул: $\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha$ и $\text{tg}\alpha=\text{ctg}(90°-\alpha)$ выражение превращается в произведение тангенсов и котангенсов попарно равных углов.

■ Связь между значениями тригонометрических функций

6.6. Расположите в порядке возрастания числа $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

$\operatorname{tg}\alpha = 10,\ \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}.$

Решение. Не обязательно вычислять $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$. По условию $\operatorname{tg}\alpha = 10$, тогда α в III четверти будет больше 225°. Синус и косинус отрицательные, синус меньше косинуса; $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}1$.

Ответ: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

6.7. Найдите $\dfrac{5\sin^2 y - 4\sin y\cos y + 3}{3\sin y\cos y - 4\sin^2 y - 5\cos^2 y}$, если $\operatorname{ctg} y = 2$.

Решение. Можно решать по-разному.

Первый вариант. Если $\operatorname{ctg} y = 2$, то $\cos y = 2\sin y$.

Второй вариант. Вынести за скобку $\sin^2 y$ в числителе и знаменателе дроби и сократить:

$$\frac{5 - 4\operatorname{ctg} y + \dfrac{3}{\sin^2 y}}{3\operatorname{ctg} y - 4 - 5\operatorname{ctg}^2 y} = \frac{-3 + \dfrac{3}{\sin^2 y}}{6 - 4 - 20} = \frac{3\left(\dfrac{1-\sin^2 y}{\sin^2 y}\right)}{-18} = \frac{3\operatorname{ctg}^2 y}{-18} = -\frac{2}{3}.$$

6.8. Докажите, что $A > 4$, если $A = \dfrac{1}{\cos z} + \cos z - \operatorname{tg} z - \operatorname{ctg} z$, где $z \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Доказательство. Воспользуемся известным свойством чисел: для положительных чисел t: $t + \dfrac{1}{t} \geq 2$, для отрицательных чисел t: $t + \dfrac{1}{t} \leq -2$. Откуда $\dfrac{1}{\cos z} + \cos z \geq 2$, $\operatorname{tg} z + \dfrac{1}{\operatorname{ctg} z} \leq -2$.

6.9. Определите знак выражения.

Указание. Фактически это задания на сравнение чисел или на определение четверти, в которой находится угол.

Рассмотрим несколько примеров.

А

4) $\dfrac{\cos(\sin 2)}{\operatorname{tg}(\cos 1)}$.

Решение. $\dfrac{\cos(\sin 2)}{\operatorname{tg}(\cos 1)} > 0$, $0 < \sin 2 < 1$, угол поворота, равный $\sin 2$, находится в I четверти, аналогичные рассуждения для $\cos 1$.

5) $\log_{\frac{1}{2}} \cos 43° + \log_2 \cos 47°$.

Решение.

$$\log_{\frac{1}{2}} \cos 43° + \log_2 \cos 47° = \log_2 \cos 47° - \log_2 \cos 43° < 0.$$

Так как $\cos 47° < \cos 43°$, $\log_2 t$ — возрастающая функция, то $\log_2 \cos 47° < \log_2 \cos 43°$.

Ответ: < 0.

Б

4) $\cos 3{,}2 - \sin 5$.

Решение. Число 3,2 ближе к π, чем число 5 к $\dfrac{3\pi}{2}$, поэтому $\cos 3{,}2 < \sin 5$, отсюда $\cos 3{,}2 - \sin 5 < 0$.

6) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\cos^2 134° - 1}}$.

Решение. $|\cos 134°| < |\cos 135°|$, отсюда $\cos^2 134° < \cos^2 135° = \dfrac{1}{2}$, значит, $2\cos^2 134° < 1$.

7) $\operatorname{tg} 42° - 2 + \operatorname{ctg} 41°$.

Решение. $\operatorname{tg} 42° + \operatorname{ctg} 42° > 2$, так как для положительных чисел $t + \dfrac{1}{t} \ge 2$.

Равенство достигается, когда каждое из них равно 1; $\operatorname{ctg} 41° > \operatorname{ctg} 42°$, $\operatorname{tg} 42° + \operatorname{ctg} 41° > \operatorname{tg} 42° + \operatorname{ctg} 42° > 2$.

Ответ: знак «+».

9) $\operatorname{tg} 22° + \operatorname{ctg} 23° - \operatorname{tg} 23° - \operatorname{ctg} 22°$.

Решение. $\operatorname{tg} 22° - \operatorname{ctg} 22° = -\dfrac{\cos 44°}{\frac{1}{2}\sin 44°} = -2\operatorname{ctg} 44°$; $\operatorname{ctg} 23° - \operatorname{tg} 23° = \dfrac{\cos 46°}{0{,}5\sin 46°} = 2\operatorname{ctg} 46°$.

$2\operatorname{ctg} 46° - 2\operatorname{ctg} 44° < 0$, так как $\operatorname{ctg} 46° < \operatorname{ctg} 44°$.

10) $\sin 86° + \cos 86° - 1$.

Решение. Нужно сравнить $\sin 86° + \cos 86°$ и 1. Сравним их квадраты: $1 + \sin 172° > 1$, отсюда $\sin 86° + \cos 86° - 1 > 0$.

В

В заданиях 1), 2), 4), 5) применяем свойство $t + \frac{1}{t} \geq 2$ при $t > 0$.

5) $\log_3 5 + 2\sin\frac{55\pi}{37} + \log_5 3$.

Решение. $\log_3 5 + 2\sin\frac{55\pi}{37} + \log_5 3 = \log_3 5 + \frac{1}{\log_3 5} + 2\sin\frac{55\pi}{37} > 0$;

так как $\log_3 5 > 1$, по свойству суммы взаимно обратных чисел имеем $\log_3 5 + \frac{1}{\log_3 5} > 2$, а $-2 < 2\sin\frac{55\pi}{7} < 0$.

6.19. Вычислите значение выражения.

Б

Указание. Это стандартные задания на применение формул двойных и половинных углов.

Рассмотрим задания 4) и 6).

4) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - 6}{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2}$, если $\alpha = \frac{3\pi}{16}$.

Решение. Заметим, что $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$; выделяем в числителе и знаменателе дроби полные квадраты:

$\frac{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - 6}{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2} = \frac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - 8}{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2} = 1 - 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2\sin^2 2\alpha = 1 - (1 - \cos 4\alpha) = \cos 4\alpha$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6) $\cos 4\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

Решение. $\cos 4\alpha = 1 - 2\sin^2 2\alpha = 1 - 2(2\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 1 - 8\sin^2\alpha(1 - \sin^2\alpha) = 1 - 8\sin^2\alpha + 8\sin^4\alpha$, $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, вычисляем: $1 - \frac{8}{9} + \frac{8}{81} = \frac{17}{81}$.

Ответ: $\frac{17}{81}$.

6.21. Найдите значение выражения.

В

3) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$.

Решение. Умножим и разделим выражение на $2\sin\frac{\pi}{7}$.

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{\left(\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}\right)\cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\sin\pi-\sin\frac{3\pi}{7}\right)\cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{8}.$$

Ответ: $-\frac{1}{8}$.

4) $4\sin18^\circ\sin306^\circ$.

Решение. $4\sin18^\circ\sin306^\circ=-4\sin18^\circ\cos36^\circ=$

$$=\frac{-4\sin18^\circ\cos18^\circ\cos36^\circ}{\cos18^\circ}=\frac{-\sin72^\circ}{\cos18^\circ}=\frac{-\sin72^\circ}{\sin72^\circ}=-1.$$

Ответ: -1.

6) $|3\sin\alpha-\cos\alpha|$, если $3\sin2\alpha+4\cos2\alpha=1$.

Решение. Находим $|3\sin\alpha-\cos\alpha|^2=9\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-6\sin\alpha\cos\alpha=$ $=5-(3\sin2\alpha+4\cos2\alpha)=4$.

Ответ: 4.

6.23. Вычислите значение выражения.

Б

4) $\sin15^\circ+\text{tg}30^\circ\cos15^\circ$.

Решение. Выражение положительное, рассмотрим квадрат данного выражения:

$$\sin^2 15^\circ+2\text{tg}30^\circ\cdot\cos15^\circ\cdot\sin15^\circ+\text{tg}^2 30^\circ\cdot\cos^2 15^\circ=$$

$$=\frac{1-\cos30^\circ}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1+\cos30^\circ}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{2+\sqrt{3}}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

6) $\dfrac{\sqrt{3}\sin 65^\circ - \sin 25^\circ}{\sqrt{2}\sin 10^\circ - \sqrt{2}\cos 10^\circ}$.

Решение. $\dfrac{\sqrt{3}\sin 65^\circ - \sin 25^\circ}{\sqrt{2}\sin 10^\circ - \sqrt{2}\cos 10^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}\sin 65^\circ - \cos 65^\circ}{\sqrt{2}(\sin 10^\circ - \cos 10^\circ)} =$

$= \dfrac{2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 65^\circ - \dfrac{1}{2}\cos 65^\circ\right)}{2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 10^\circ - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos 10^\circ\right)} = \dfrac{\sin 35^\circ}{\sin(-35^\circ)} = -1.$

Ответ: -1.

6.24. Найдите значение выражения.

В

2) $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha$ — корень уравнения $8(t - t^3) = (1 + t^2)^2$.

Решение. Будем находить $\sin 4\alpha$ из данного уравнения, заменив t на $\operatorname{tg}\alpha$.

$8\operatorname{tg}\alpha(1 - \operatorname{tg}^2\alpha) = (1 + \operatorname{tg}^2\alpha)^2$, $\dfrac{8\sin\alpha\cos 2\alpha}{\cos^3\alpha} = \dfrac{1}{\cos^4\alpha}$,

$4\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 1$, $2\sin 4\alpha = 1$, $\sin 4\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

4) $(\cos 5\alpha)(\cos\alpha)^{-1}$, если $\cos 2\alpha = -\dfrac{1}{4}$.

Решение. Данное выражение представим через $\cos 2\alpha$.

$\dfrac{\cos 5\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha\cos 4\alpha - \sin\alpha\sin 4\alpha}{\cos\alpha} = \cos 4\alpha - \dfrac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha} =$

$= 2\cos^2 2\alpha - 1 - \dfrac{4\sin^2\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = 2\cos^2 2\alpha - 1 - 2(1 - \cos 2\alpha)\cos 2\alpha =$

$= 4\cos^2 2\alpha - 2\cos 2\alpha - 1$; $\cos 2\alpha = -\dfrac{1}{4}$, тогда $4\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{2}{4} - 1 = -\dfrac{1}{4}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{4}$.

5) $\cos 3\alpha + \cos\alpha$, если α — корень уравнения $2\cos^3\alpha + 1 = \cos\alpha$.

Решение. Выразим $\cos 3\alpha + \cos\alpha$ через $\cos\alpha$: $\cos 3\alpha + \cos\alpha = 2\cos 2\alpha\cos\alpha = 2(2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha = 2(2\cos^3\alpha - \cos\alpha)$. Из уравнения $2\cos^3\alpha - \cos\alpha = -1$.

Ответ: -2.

6.28. Вычислите.

Б

2) $32\sin70°\cos40°\sin10°$.

Решение. Умножим и разделим выражение на $\cos 10°$:

$$32\sin70°\cos40°\sin10° =$$

$$\frac{32\cos20°\cos40°\sin10°\cos10°}{\cos10°} = \frac{4\sin80°}{\cos10°} = 4.$$

Ответ: 4.

3) $\sqrt{8}(\cos5° - \sin5°) - 8\cos^2 25°$.

Решение.

$$\sqrt{8}(\cos5° - \sin5°) - 8\cos^2 25° = 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 5° - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 5°\right) - 4(1 + \cos 50°) =$$

$= 4\sin40° - 4 - 4\sin40° = -4$.

Ответ: –4.

4) $\cos20° + \sin190° + \cos140°$.

Решение. $\cos20° + \sin190° + \cos140° = (\cos140° + \cos20°) - \sin10° = 2\cos80°\cos60° - \sin10° = \sin10° - \sin10° = 0$.

Ответ: 0.

6.30. Сравните по величине числа.

В

2) $a = \text{tg}1\text{tg}2 + \text{tg}2\text{tg}3 - \dfrac{\text{tg}3}{\text{tg}1}$ и $b = -3$.

Решение.

$$\text{tg}1\text{tg}2 + \text{tg}2\text{tg}3 - \frac{\text{tg}3}{\text{tg}1} = \text{tg}1\text{tg}2 + \frac{\text{tg}3(\text{tg}1\text{tg}\,2 - 1)}{\text{tg}1} =$$

$$= \text{tg}1\text{tg}2 + \frac{\text{tg}\,2 + \text{tg}\,1}{1 - \text{tg}1\text{tg}\,2} \cdot \frac{(\text{tg}1\text{tg}\,2 - 1)}{\text{tg}1} = \text{tg}1\text{tg}2 -$$

$$- \frac{\text{tg}2 + \text{tg}1}{\text{tg}1} = \text{tg}1 \cdot \frac{2\text{tg}\,1}{1 - \text{tg}^2 1} - \frac{\dfrac{2\text{tg}\,1}{1 - \text{tg}^2 1} + \text{tg}1}{\text{tg}1} =$$

$$= \frac{2\text{tg}^2 1}{1 - \text{tg}^2 1} - \frac{3 - \text{tg}^2 1}{1 - \text{tg}^2 1} = \frac{3(\text{tg}^2 1 - 1)}{1 - \text{tg}^2 1} = -3.$$

Ответ: $a = b$.

5) $a = \sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4}$ и $b = \frac{1}{7}$.

Решение. Умножим и разделим выражение a на 8:

$$\frac{8\sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4}}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{8} = \frac{1}{8} < \frac{1}{7}.$$

Ответ: $a < b$.

6.31. Вычислите значение выражения.

B

1) $3\sin100°\cos50° - 2\sin^3 50°$.

Решение. Применяем формулу $\sin3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$:

$$3\sin100°\cdot\cos50° - 2\sin^3 50° = \frac{3}{2}(\sin50° + \sin150°) - 2\sin^3 50° =$$

$$= \frac{3\sin50° - 4\sin^3 50°}{2} + \frac{3\sin150°}{2} = \frac{\sin150°}{2} + \frac{3}{4} = 1.$$

Ответ: 1.

3) $\sin20°\cos50°\sin60°\cos10°$.

Решение.

$$\sin20°\cos50°\sin60°\cos10° = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos50°\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \sin10°\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\cos50° + \sin10°\cos50°\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\cos50° + \frac{1}{2}\sin60° - \frac{1}{2}\sin40°\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{16}.$$

Ответ: $\frac{3}{16}$.

4) $\frac{\mathrm{ctg}\,60° + \mathrm{tg}\,60° + \mathrm{ctg}\,50° + \mathrm{tg}\,50°}{\cos20°}$.

Решение.

Заметив, что $\mathrm{ctg}\,60° + \mathrm{tg}\,60° = \frac{4}{\sqrt{3}}$, а $\mathrm{ctg}\,50° + \mathrm{tg}\,50° =$ $= \frac{1}{\sin50°\cos50°} = \frac{2}{\cos10°}$, получим:

$$\frac{\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\cos 10^\circ}}{\cos 20^\circ}=\frac{2\left(2\cos 10^\circ+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}\cos 10^\circ \cos 20^\circ}=$$

$$=\frac{4\left(\cos 10^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos 30^\circ+\frac{1}{2}\cos 10^\circ\right)}=\frac{4\cdot 2}{\sqrt{3}}=\frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{8}{\sqrt{3}}$.

■ Тригонометрические уравнения

6.40. Решите уравнения.

Б

9) $\mathrm{tg}^2 x + 2\cos 2x = 5$.

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}+$ $+\ 2\cos 2x = 5$, обозначим $\cos 2x = t$. После преобразований получим квадратное уравнение $t^2 - 2t - 2 = 0$, $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$, $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\,(1-\sqrt{3}) + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

10) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos 3x$.

Решение. Разделив обе части уравнения на 2, получим: $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos 3x$, $-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}-x\right)=0$, откуда

$x=-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbf{Z};\ x=\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$.

В

1) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}$.

Решение. Прибавляем к каждой части уравнения $2\sin^2 x\cos^2 x$. Получим: $\frac{7}{8}+2\sin^2 x\cos^2 x = 1$.

2) $4\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=1-\cos 3x$.

Решение. Заметив, что $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x$, получим уравнение $\sin x + 2\sin x\cos 2x = 1 - \cos 3x$; заменим $2\sin x\cos 2x = \sin 3x - \sin x$, тогда уравнение примет вид: $\sin 3x + \cos 3x = 1$.

Разделив обе части на $\sqrt{2}$, получим: $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=\frac{2\pi}{3}n$, $n \in \mathbf{Z}$, или $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k$, $k \in \mathbf{Z}$.

4) $4\sin^3 x = \sin x - \cos x$.

Решение. Заметим, что $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, не удовлетворяют уравнению; разделив на $\cos^3 x$, получим $4\,\mathrm{tg}^3 x=\frac{\mathrm{tg}\,x-1}{\cos^2 x}$, $4\,\mathrm{tg}^3 x = (\mathrm{tg}\,x - 1)(1 + \mathrm{tg}^2 x)$, получаем кубическое уравнение $3\,\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\,x + 1 = 0$, которое имеет единственный корень $\mathrm{tg}\,x = -1$, откуда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

5) $|4\sin^2 x - 3| = 2 + 4\cos 2x$.

Решение. Учитывая, что $4\sin^2 x = 2(1 - \cos 2x)$, получим уравнение $|2\cos 2x + 1| = 2(2\cos 2x + 1)$, которое превращается в верное равенство при условии $2\cos 2x + 1 = 0$, откуда $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

ГЛАВА 7

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

Содержание темы

Функции. Область определения и множество значений; график функции, построение графиков функций, заданных различными способами.

Свойства функции: монотонность, четность, нечетность, ограниченность, периодичность. Промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения, точки экстремума. Графическая интерпретация. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях.

Обратные функции. *Область определения и область значений обратной функции.* График обратной функции.

Арифметические операции над функциями. Сложная функция (композиция).

Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции. Определения функций, их свойства и графики.

Обратные тригонометрические функции.

Преобразования графиков. Параллельный перенос, симметрия относительно осей координат и симметрия относительно начала координат, симметрия относительно прямой $y = x$, растяжение и сжатие вдоль осей координат.

Понятие о непрерывности функции.

Требования к результатам обучения

В результате освоения данной темы обучающийся должен *уметь*:

- вычислять значение функции по заданному значению аргумента при различных способах задания функции;
- определять основные свойства числовых функций, иллюстрировать их на графиках;
- строить графики изученных функций, иллюстрировать по графику свойства элементарных функций;
- использовать понятие функции для описания и анализа зависимостей величин;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

- для описания с помощью функций различных зависимостей, представления их графически, интерпретации графиков.

Примерное поурочное планирование

Содержание темы	Количество часов на тему (вариант программы)				
	20 (1)	14 (2)	24 (3)	30 (4)	10 (5)
Обзор общих понятий	4	2	4	6	2
Схема исследования функции	6	4	8	10	2
Преобразования функций и действия над ними	4	3	6	6	2
Симметрия функций и преобразование их графиков	2	2	2	3	1

Содержание темы	Количество часов на тему (вариант программы)				
	20 (1)	14 (2)	24 (3)	30 (4)	10 (5)
Непрерывность функции	1	1	1	2	1
Беседа	1	1	1	1	1
Контроль усвоения	2	1	2	2	1

Изучение функций имеет две внутренние линии — основные общие свойства и их демонстрация на примерах функций, изученных в основной школе, и свойства новых классов функций (показательные, логарифмические, тригонометрические). Одновременно на развитие функциональной линии оказывает влияние параллельное развитие линии алгебраических преобразований и линии уравнений и неравенств. Согласование всех этих моментов может происходить по-разному. Структура учебника позволяет преподавателю самостоятельно выбрать подходящую расстановку материала.

Текст данной главы сосредоточивает внимание в основном на общих свойствах функций и в то же время не использует методов математического анализа (которые также входят в функциональную линию).

Различия в планировании могут выражаться прежде всего в количестве и уровне выбираемого практического материала.

Рекомендации по решению задач

7.1. Даны уравнения зависимостей. Постройте их графики.

В

8) $x^2 + 5xy - 2y^2 = 0$.

Решение. Очевидно, что точка $O(0; 0)$ принадлежит графику зависимости.

Пусть теперь $x \neq 0$. Разделим на x^2 и обозначим $\frac{y}{x} = t$. Получим уравнение $2t^2 - 5t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{5+\sqrt{33}}{4}$, $t_2 = \frac{5-\sqrt{33}}{4}$. Обозначим эти корни соответственно a и b, тогда $t = a \Leftrightarrow \frac{y}{x} = a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = ax$ — уравнение прямой, аналогично получим уравнение другой прямой $y = bx$. Таким образом, графиком зависимости являются две пересекающиеся прямые: $y = ax$ и $y = bx$.

7.9. Дана функция $y = f(x)$ с указанной областью определения. Запишите обратную к ней функцию в виде $y = g(x)$, указав ее область определения D. Постройте на одном чертеже графики функций f и g.

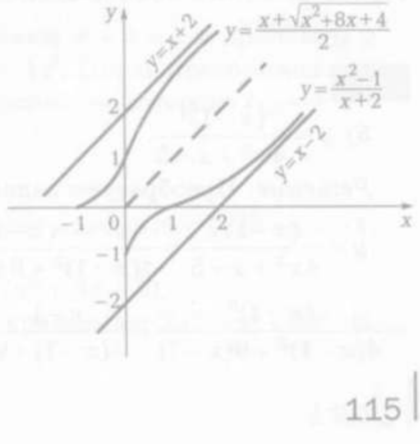
B

1) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$, $x \geq 0$.

Решение. Выразим x через y: $x = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2 + 8y + 4}}{2}$. Знак «$-$» можно отбросить, так как при любых значениях y получаем $x < 0$, что невозможно по условию. Итак, поменяв местами x и y, получим обратную функцию: $y = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 8x + 4}}{2}$.

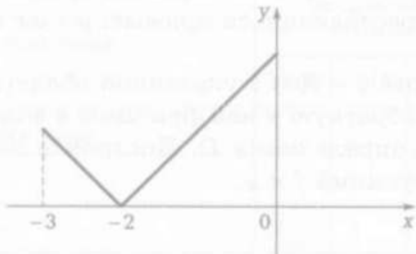
Функция $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$, $x \geq 0$, возрастает; при $x = 0$ $y = -\dfrac{1}{2}$; при $x \to +\infty$ $y \to +\infty$, следовательно, ее область значений $\left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. Это же множество является областью определения обратной функции.

Строим графики функций. При $x = 1$ $y = 0$; при бо́льших значениях x: $y = x - 2 + \dfrac{3}{x + 2} \approx x - 2$, т.е. график функции приближается неограниченно к прямой $y = x - 2$. График обратной функции симметричен относительно биссектрисы $y = x$, следовательно, при больших x неограниченно приближается к прямой $y = x + 2$.



Ответ: $y = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 8x + 4}}{2}$; $x \geq -\dfrac{1}{2}$.

7.14. Дан график функции $y = f(x)$. Достройте его так, чтобы функция удовлетворяла указанному условию.



Б

3) $f(x) + f(-x) = 2$.

Указание. Отразить симметрично относительно начала координат и поднять на 2 единицы вверх.

В

1) $f(-x) = f(-2 - x)$.

Решение. Условие противоречиво, поскольку, как бы мы ни продолжили функцию, положив, например, $x = 0{,}5$, получим по условию, что $f(-0{,}5) = f(-1{,}5)$, что противоречит рисунку.

2) $f(x) = -f(-1 - x)$.

Решение. Условие противоречиво по той же причине. Положив, например, $x = 0$, получим, что $f(0) = -f(-1)$, что противоречит рисунку.

■ Исследование дробно-линейных функций

7.18. Проведите полное исследование функции и постройте ее график.

В

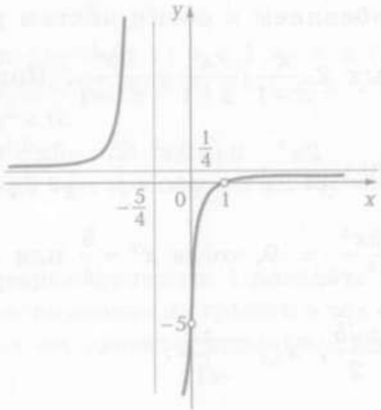
5) $y = \dfrac{(x-1)^2}{4x^2 + x - 5}$.

Решение. Преобразуем заданную функцию:

$$y = \frac{(x-1)^2}{4x^2 + x - 5} = \frac{(x-1)^2}{4(x-1)^2 + 8x - 4 + x - 5} =$$

$$= \frac{(x-1)^2}{4(x-1)^2 + 9(x-1)} = \frac{x-1}{4(x-1)+9},\ x \neq 1.$$

Строим график дробно-линейной функции с «выколотой» точкой $x = (1; 0)$.



7.20. Решите уравнение.

B

5) $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$.

Решение. Корень $x = 1$ находим подбором. При делении $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1$ на $(x - 1)$ получим многочлен $x^3 + 3x^2 - 3x - 1$. Решаем уравнение $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$, $(x^3 - 1) + 3x(x - 1) = 0$, $(x - 1)(x^2 + x + 1 + 3x) = 0$, откуда $x = 1$ или $x^2 + 4x + 1 = 0$, т.е. $x = -2 \pm \sqrt{3}$.

6) $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$.

Решение. Два корня угадываются: $x = -3$, $x = -5$. Чтобы убедиться, что других корней нет, применяем схему Горнера или деление уголком.

Можно решать по-другому. Заменим $x + 4 = t$ и прибавим к обеим частям $2(t - 1)^2(t + 1)^2 = 2(t^2 - 1)^2$. После преобразований получим уравнение $t^4 + 6t^2 - 7 = 0$, решение которого $t_{1,2} = \pm 1$.

7) $\dfrac{x^2+1}{x+1} + \dfrac{x^2+2}{x+2} = 2$.

Решение. Решаем по стандартному алгоритму ОДЗ: $x \neq -1$, $x \neq -2$.

$(x^2 + 1)(x + 2) + (x^2 + 2)(x + 1) = 2\,(x^2 + 3x + 2)$.

После преобразований получаем уравнение: $2x^3 + x^2 - 3x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1{,}5$.

8) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=90.$

Решение. Прибавляем к обеим частям удвоенное произведение слагаемых $2\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x}{x-1}=\frac{2x^2}{x^2-1}$. Получим уравнение:

$\left(\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}\right)^2=90+\frac{2x^2}{x^2-1}$, $\left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x^2-1}-90=0$, откуда $\frac{2x^2}{x^2-1}=10$ или $\frac{2x^2}{x^2-1}=-9$, тогда $x^2=\frac{5}{4}$ или $x^2=\frac{9}{11}$.

Ответ: $x_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_{3,4}=\frac{\pm3}{\sqrt{11}}$.

7.21. Решите неравенство.

B

Рассмотрим решение неравенств с параметром.

1) $x^2+2x+a\le 0$.

Решение. $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-a}$, старший коэффициент — число положительное. Рассматриваем случай: $D<0$, $a>1$ — неравенство решений не имеет; $D=0$, $a=1$ — одно решение $x=-1$; $D>0$, $a<1$ — неравенство выполняется при x из промежутка $\left[-1-\sqrt{1-a};-1+\sqrt{1-a}\right]$.

2) $ax^2\le\frac{1}{a}$.

Решение. Заметим, что при $a=0$ неравенство не имеет смысла. Рассматриваем случаи:

$a>0$, $x^2\le\frac{1}{a^2}$, $\left(x-\frac{1}{a}\right)\left(x+\frac{1}{a}\right)\le 0$, $x\in\left[-\frac{1}{a};\frac{1}{a}\right]$; $a<0$, $x^2\ge\frac{1}{a^2}$, $\left(x-\frac{1}{a}\right)\left(x+\frac{1}{a}\right)\ge 0$, тогда $x\in\left(-\infty;\frac{1}{a}\right]\cup\left[-\frac{1}{a};+\infty\right)$.

3) $x^2-x-ax+a\ge 0$.

Решение. Раскладываем на множители и решаем методом интервалов.

$(x-1)(x-a) \geq 0.$

Возможны три случая: 1) $a < 1 \Rightarrow x \in (-\infty;\ a] \cup [1;\ +\infty)$; 2) $a > 1 \Rightarrow x \in (-\infty;\ 1] \cup [a;\ +\infty)$; 3) $a = 1 \Rightarrow x \in \mathbf{R}$.

4) $x^2 - 3ax + 2a^2 < 0$.

Решение. $D = a^2$; $x_1 = -2a$, $x_2 = -a$.

При $a = 0$ решений нет; при остальных значениях a $x \in (-2a;\ -a)$ или $x \in (-a;\ -2a)$.

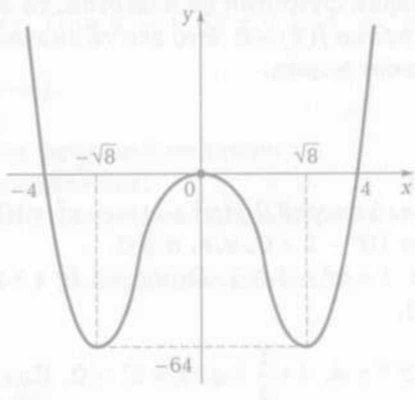
7.22. Постройте график функции. Проведите полное исследование функции, опираясь на график в тех случаях, когда вы затрудняетесь это сделать, используя формулу.

Б

2) $y = x^4 - 16x^2$.

Решение. Область определения: $x \in \mathbf{R}$, функция четная, нули функции -4, 0 (второй кратности), 4. Схема изменения знаков:

Область значений данной функции совпадает с областью значений функции $y = t^2 - 16t$ и равна $E_y = [-64;\ +\infty)$, наименьшее значение при $t = 8$, $x = \pm\sqrt{8}$. Строим график.



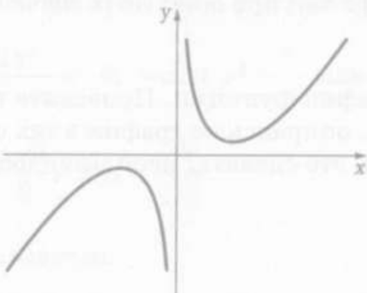
В

4) $y = x^3 + \dfrac{16}{3x}$.

Решение. Область определения: $x \neq 0$. Функция нечетная. Достаточно исследовать ее на $(0; +\infty)$ и затем отобразить симметрично относительно начала координат.

Нулей функция не имеет. Наименьшего и наибольшего значений функция также не имеет, так как она принимает сколь угодно большие по модулю значения вблизи нуля и на бесконечности.

Нарисуем схематически график функции.



Функция имеет минимум при положительном значении x и максимум при отрицательном значении x. Минимум и максимум функции можно найти с помощью производной, тогда можно точно определить область значений функции.

7.27. Найдите области значений функций.

Указание. Область значений функции легко определить по графику. Если график функции не известен, то ее можно определить, решая уравнение $f(x) = a$. Это все те значения a, при которых уравнение имеет корни.

Б

4) $y = \lg(x^2 + 1)$.

Решение. Первый способ. $\lg(x^2 + 1) = a$, $x^2 = 10^a - 1$, уравнение имеет корни, если $10^a - 1 \geq 0$, т. е. $a \geq 0$.

Второй способ. $t = x^2 + 1 \geq 1$. При $t \geq 1$ $\lg t \geq 0$.

Ответ: $[0; +\infty)$.

5) $y = 2^x + 2^{-x}$.

Решение. $2^x + 2^{-x} = a$, $t + \frac{1}{t} = a$, $t = 2^x > 0$. Квадратное уравнение $t^2 - at + 1 = 0$ имеет хотя бы один положительный корень, если выполняются условия: $\begin{cases} D \geq 0, \\ a \geq 0. \end{cases}$ Заметим, что произведение корней равно 1, значит, оба корня либо положительные, либо отрицательные; $D = a^2 - 4$. Решаем систему: $\begin{cases} a^2 - 4 \geq 0, \\ a > 0, \end{cases}$ получаем $a \geq 2$.

Можно рассуждать по-другому: $t + \frac{1}{t}$, $t > 0$ — это сумма двух взаимно обратных положительных чисел. Про нее известно, что она больше либо равна 2.

Ответ: $[2; +\infty)$.

В

1) $y = \sqrt{x} - \sqrt{2 - x}$.

Решение. Данная функция является монотонно возрастающей на [0; 2], так как «склеена» из двух монотонно возрастающих функций: $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{2 - x}$. $y_{\min} = y(0) = -\sqrt{2}$, $y_{\max} = y(2) = -\sqrt{2}$.

Ответ: $\left[-2; \sqrt{2}\right]$.

3) $y = 2^{x^2 + 2x}$.

Решение. Композиция двух функций: $t = x^2 + 2x$ и $y = 2^t$, $t \geq -1$, $y = 2^t \nearrow$, при $t \geq -1$ принимает значения $[0{,}5; +\infty)$.

5) $y = x + \lg x$.

Область определения $x > 0$; $\lg x$ принимает любые значения от $-\infty$ до $+\infty$. Обе функции возрастают, следовательно, их сумма также возрастает. При $x \to 0$ $\lg x + x \to -\infty$, при $x \to +\infty$ $\lg x + x \to +\infty$.

Ответ: $(-\infty, +\infty)$.

7.29. Для данных функций найдите:

а) область определения;

б) наименьший положительный период (если он существует);

в) наибольшее и наименьшее значения.

Б

1) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} 2x$.

Решение. а) Область определения: $\cos x \neq 0$, $\sin 2x \neq 0$, т.е. $x \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$;

б) $\mathrm{tg}\,(x + \pi)\ \mathrm{ctg}\,(2(x + \pi)) = \mathrm{tg}\,x\mathrm{ctg}\,2x$;

в) чтобы ответить на вопрос, преобразуем выражение:

$$\mathrm{tg}x\mathrm{ctg}2x = \frac{\sin x \cos 2x}{\cos x \sin 2x} = \frac{\cos 2x}{2\cos^2 x} = \frac{\cos 2x}{1 + \cos 2x};$$

это дробно-рациональная функция $y = \frac{t}{1+t}$ — монотонная, $-1 < t = \cos 2x < 1$, $y(1) = 0{,}5$ при $x \to -1$ и $y \to -\infty$.

Ответ: в) наибольшего значения нет, $y < 0{,}5$.

7) $y = \frac{3}{\sin x + \sin 2x}$.

Решение. а) $\sin x + \sin 2x \neq 0$, $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq -\frac{1}{2}$, получим: $x \neq \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$, $x \neq \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$;

б) $\sin\,(x + 2\pi) + \sin\,2(x + 2\pi) = \sin\,x + \sin\,2x$;

в) наименьшего значения нет, наибольшего тоже нет, так как при $x \to 0$ $y \to +\infty$, при $x \to \pi$ $y = \frac{3}{\sin x\,(1 + 2\cos x)} \to -\infty$.

В

4) $y = \sqrt{\sin x + \cos x}$.

Решение. Заметим, что $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

а) область определения: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$, откуда $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathrm{Z}$;

б) 2π — период;

в) $E_y = \left[0; \sqrt[4]{2}\right]$.

5) $y = \sqrt{\lg \cos x}$.

Решение.

а) область определения $\lg\,\cos\,x \geq 0$.

Решаем систему:

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \cos x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \cos x = 1,\ x = 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z};$$

б) 2π — период;

в) область значений состоит из одного числа $E_y = \{0\}$.

9) $y = \sqrt{\arccos x - \frac{\pi}{2}}$.

Решение. а) область определения $\arccos x - \frac{\pi}{2} \geq 0$, $\arccos x \geq \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1; 0]$;

в) $0 \leq t = \arccos x \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq t - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \sqrt{t - \frac{\pi}{2}} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Ответ: $E_y = \left[0; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$.

Б

7.31. Вычислите значение функции.

10) tg (arccos (–0,6)).

Решение. $\cos(\arccos(-0{,}6)) = -0{,}6$; $\sin(\arccos(-0{,}6)) = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$; $\operatorname{tg}(\arccos(-0{,}6)) = -\frac{4}{3}$.

11) arcsin (sin 3).

Решение. $\sin 3 = \sin(\pi - 3)$, $\arcsin(\sin 3) = \arcsin(\sin(\pi - 3)) = \pi - 3$.

12) arcsin (sin 5).

Решение. $\sin 5 = -\sin(2\pi - 5)$, $\arcsin(\sin 5) = 5 - 2\pi$.

13) arcsin (cos 4).

Решение.

$\cos 4 = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 4\right)$;

$\arcsin(\cos 4) = -\left(\frac{3\pi}{2} - 4\right) = 4 - 1{,}5\pi$.

14) arccos (sin 8).

Решение. $\sin 8 = \sin(3\pi - 8) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (3\pi - 8)\right) = \cos(8 - 2{,}5\pi)$; $\arccos(\sin 8) = 8 - 2{,}5\pi$.

15) arcsin (sin 15).

Решение. $\sin 15 = \sin(5\pi - 15)$; $\arcsin(\sin 15) = 5\pi - 15$.

ГЛАВА 8

МНОГОГРАННИКИ И КРУГЛЫЕ ТЕЛА

Содержание темы

Многогранники

Вершины, ребра, грани многогранника. *Развертка. Многогранные углы. Выпуклые многогранники. Теорема Эйлера.*

Призма. Прямая и *наклонная* призма. Правильная призма. Параллелепипед. Куб.

Пирамида. Правильная пирамида. *Усеченная пирамида.* Тетраэдр.

Симметрии в кубе, параллелепипеде, *призме и пирамиде.*

Сечения куба, призмы и пирамиды.

Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр).

Тела и поверхности вращения

Цилиндр и конус. *Усеченный конус.* Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. *Осевые сечения и сечения, параллельные основанию.*

Шар и сфера, их сечения. *Касательная плоскость к сфере.*

Требования к результатам обучения

В результате освоения данной темы обучающийся должен *уметь*:

- распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
- анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;
- изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;
- *строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды.*

Примерное поурочное планирование

Содержание темы	Количество часов на тему (вариант программы)				
	30 (1)	10 (2)	30 (3)	30 (4)	10 (5)
Словарь геометрии	4	1	4	4	1
Параллелепипеды и призмы	7	2	7	7	2
Пирамиды	7	2	7	7	2
Круглые тела	6	2	6	6	2
Правильные многогранники	3	1	3	3	1
Беседа	1	1	1	1	1
Контроль усвоения	2	1	2	2	1

Изучение этой темы существенно различается для вариантов, по которым отводится 30 и 10 ч. В более слабом варианте практически происходит актуализация уже накопленных знаний с их уточнением и приведением в порядок. В вариантах, рассчитанных на втрое большее время, конечно, есть время и смысл порешать разнообразные задачи, особенно наглядного и качественного содержания, не ограничивающиеся лишь алгоритмами и вычислениями, которые будут затронуты позже.

Материал, накопленный по этой теме в методической литературе, огромен. Рекомендуем акцентировать внимание не на теории и ее логической структуре, а на решении задач, развитии пространственного мышления.

Рекомендации по решению задач

■ Общие свойства многогранников: вершины, ребра, грани

8.2. В вершине многогранника сходится n ребер. Эту вершину срезали — провели сечение плоскостью вблизи вершины, пересекающей все ребра. Как изменились числа В, Р, Г? Сохранилось ли соотношение теоремы Эйлера?

Решение. В результате такого действия прибавится одна грань, $n-1$ вершина и n ребер, поэтому если ранее было В вершин, Р ребер и Г граней, причем В + Г − Р = 2, то теперь станет В + n − 1 вершина, Г + 1 грань и Р + n − 1 ребро, т.е. (В + n − 1) + (Г + 1) − − (Р + n − 1) = В + Г − Р + n − 1 + 1 − n = 2, т.е. соотношение теоремы Эйлера сохранилось.

8.4. Докажите, что существует многогранник, имеющий 300 ребер.

Например, пирамида, в основании которой лежит 150-угольник.

8.6. Может ли существовать многогранник с 7 ребрами?

Решение. Пусть Р = 7. Если бы хоть одна грань имела не меньше четырех вершин, то было бы Р ≥ 8, так как, кроме четырех ребер этой грани, из ее каждой вершины выходило бы еще по ребру. Значит, все грани — треугольники. Очевидно, Г ≥ 5 (иначе это был бы тетраэдр), но у тетраэдра всего 6 ребер. Из теоремы Эйлера В + Г = 9. Вершин не может быть меньше четырех, значит, остается один вариант: В = 4, верный только для тетраэдра, что, как сказано выше, не удовлетворяет условию.

Ответ: не может.

■ Изображение многогранников

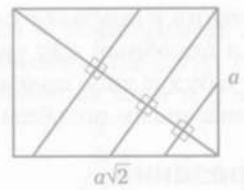
8.8. Нарисуйте сечения.

Б

2) Сечения куба плоскостью, проведенной через некоторую точку диагонали куба, перпендикулярно к ней.

Решение. Для построения сечения нужно определиться с точкой на диагонали, через которую проведен перпендикуляр к ней. Будем рассматривать перпендикуляры, находящиеся в диагональном сечении, при этом ситуация в каждом из них будет аналогичной.

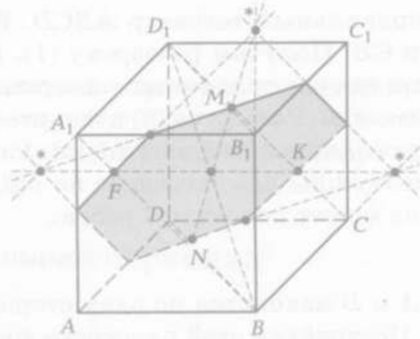
Как известно, диагональное сечение куба — это прямоугольник со сторонами $a\sqrt{2}$ и a, перпендикуляр к диагонали в таком прямоугольнике может пересекать бóльшие стороны прямоугольника, проходить через вершину и бóльшую сторону или пересекать меньшую и бóльшую стороны.



Рассмотрим эти три случая.

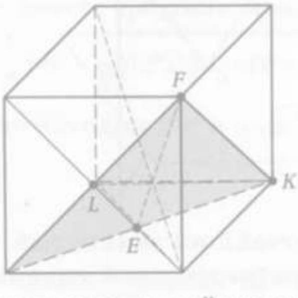
Первый случай. Перпендикуляр к диагонали куба пересекает две бóльшие стороны диагонального сечения, т. е. пересекает диагонали противоположных граней. Сечение будет пересекать все шесть граней куба, поэтому в сечении получится шестиугольник.

На рисунке сечение проходит через перпендикуляры MN и KF.



Второй случай. Перпендикуляр к диагонали проходит через вершину куба и пересекает бóльшую сторону диагонального сечения в ее середине. В том, что эта точка является серединой диагонали, убеждаемся, проведя соответствующие расчеты.

На рисунке сечение проходит через перпендикуляры FE и KL. В этом случае построение сечения проще, поскольку точки F и K, F и L, K и E попарно находятся в одной грани куба.



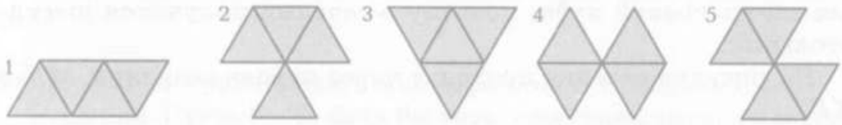
В сечении получится правильный треугольник.

Определение вида сечения в *третьем случае* аналогично второму, в сечении получится подобный ему треугольник. Все сечения параллельны друг другу и будут либо правильными подобными треугольниками, либо правильными подобными шестиугольниками.

■ Развертки и разрезания

А

8.11. Какие из фигур, изображенных на рисунке, могут быть развертками поверхности тетраэдра?

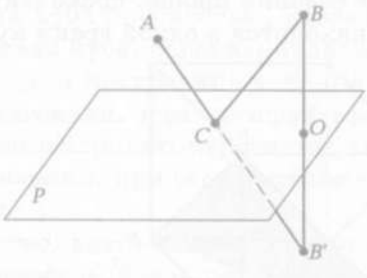


Рассмотрим правильный тетраэдр $ABCD$. Разрежем его по ребрам AD, BD и CB. Получим развертку (1). Развертка (2) не может получиться, так как тогда из одной вершины исходили бы 4 ребра, что невозможно. Развертка (3) получится, если разрезать по трем ребрам, исходящим из одной точки. Развертки (4) и (5) одинаковы и невозможны для тетраэдра по той же причине: из одной вершины не может исходить 4 ребра.

Б

8.14. Две точки A и B находятся по одну сторону от некоторой плоскости. Постройте в этой плоскости точку C так, чтобы сумма расстояний $|AC| + |CB|$ была минимальной.

Решение. Построим точку B', симметричную точке B относительно плоскости, и соединим точки A и B' прямой. Очевидно, что C — точка пересечения прямой AB' с плоскостью и есть искомая точка.

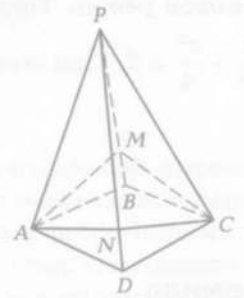


$OB \perp P$

$OB = OB'$

8.16. Постройте кратчайший замкнутый путь по поверхности правильной четырехугольной пирамиды и пересекающий (хотя бы в вершинах) все ребра пирамиды.

Решение. Пирамида с основанием $ABCD$ и вершиной P. Кратчайший путь — ломаная $AMCNA$, где M и N — основания перпендикуляров, опущенных из A и C на PB и PD.



В

8.19. Сколько достаточно провести плоскостей, чтобы разрезать куб на тетраэдры?

Решение. Для куба $ABCDA'B'C'D'$ четыре плоскости: $A'BD$, $BB'DD'$, $A'B'CD$, $BC'D$.

■ Четырехугольная пирамида

Б

8.25. Основанием пирамиды является ромб, а высота пирамиды равна $2\sqrt{3}$ дм и проходит через центр основания. Найдите сторону основания пирамиды, если расстояния от центра основания пирамиды до боковых ребер равны 2 дм и $\sqrt{3}$ дм.

Решение. Пусть x и y — половины длин диагоналей AC и BD ромба $ABCD$; O — центр ромба; P — вершина пирамиды; H — высота пирамиды; h — высота треугольника POD, опущенная на PD. Площадь $POD = \frac{1}{2}xH = \frac{1}{2}h|PD| \Rightarrow xH = h\sqrt{x^2 + H^2}$. Отсюда находим x. Аналогично находим y и $a = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $\sqrt{10}$.

В

8.28. Среди всех правильных четырехугольных пирамид с боковой поверхностью 4 найдите ту, у которой боковое ребро минимально. В ответе укажите длину стороны основания такой пирамиды.

Решение. Пусть h — высота боковой грани; a — сторона основания; l — боковое ребро. Тогда из условия следует: $ha = 2 \Rightarrow h = \frac{2}{a}$ и $l^2 = \frac{4}{a^2} + \frac{a^2}{4} \geq 2$. При этом равенство достигается, когда $\frac{4}{a^2} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow a = 2$.

Ответ: $a = 2$.

■ Треугольная пирамида

A

8.30. Основанием пирамиды служит треугольник, одна из сторон которого равна 3°, а угол, лежащий против нее, равен 30°. Определите высоту пирамиды, если каждое боковое ребро ее равно 5.

Решение. O — основание высоты пирамиды, $\angle ABC = 30°$, $|AC| = 3$. Из условия следует, что O — центр описанной окружности. Тогда $\angle AOC = 60°$ (опирается на ту же дугу, что и $\angle ABC$). Отсюда $R = \sqrt{3} \Rightarrow H = \sqrt{5^2 - (3)^2} = \sqrt{16} = 4$.

Ответ: 4.

8.31. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60°. Вычислите высоту пирамиды.

Решение. Из условия следует, что O — центр вписанной окружности. Ее радиус находим из формулы $rp = S$, где $p = 12$ — полупериметр, а $S = 24$. Далее, $H = r\text{tg}60° = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

8.33. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами a и b. Боковые ребра равны между собой и равны l. Найдите высоту пирамиды.

Решение. Основание высоты пирамиды совпадает с центром описанной окружности. Радиус окружности равен $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$, так как основание — прямоугольный треугольник.

Тогда $h = \sqrt{l^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - a^2 - b^2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - a^2 - b^2}$.

Б

8.35. Боковые грани треугольной пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, а периметр основания равен 60 см. Два боковых ребра пирамиды равны 15 и 20 см и образуют прямой угол. Определите третье боковое ребро.

Решение. По условию в пирамиде $PABC$: $|AP| = 15$, $|BP| = 20$. Пусть PM, PN, PK — высоты граней ABP, BCP и ACP соответственно, тогда $|PM| = |PN| = |PK|$. Треугольник APB — прямоугольный, поэтому его площадь $S = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 150$ и $|AB| = 25$. Отсюда $|PM| = \frac{2S}{|AB|} = \frac{300}{25} = 12$. Обозначим $|AM| = x$, $|NC| = y$. Тогда $|MB| = |NB| = 25 - x$, $|AK| = |AM| = x$, $|CK| = |CN| = y$. Отсюда $60 = 25 + (25 - x) + y + y + x \Rightarrow y = 5$ и $|PC| = \sqrt{y^2 + |PN|^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$.

Ответ: 13 см.

8.37. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12, а боковая сторона — 10. Боковые ребра образуют с основанием равные углы по 45°. Вычислите высоту пирамиды.

Решение. Пусть треугольник ABC — основание пирамиды. Из условия задачи следует, что высота пирамиды равна радиусу описанной окружности. Если h — высота треугольника ABC, проведенная из вершины B на основание, то $h = \sqrt{100 - 36} = 8$. Центр описанной окружности лежит на высоте, поэтому $y = R + \sqrt{R^2 - 36} \Rightarrow R = \frac{25}{4} = 6{,}25$.

Ответ: 6,25.

В

8.40. Все грани тетраэдра — подобные прямоугольные треугольники. Найдите отношение наибольшего и наименьшего ребер этого тетраэдра.

Указание. Условие задачи выполнимо тогда и только тогда, когда грани — равные равнобедренные прямоугольные треугольники.

Ответ: $\sqrt{2}$.

8.41. Определите боковое ребро правильной треугольной пирамиды, высота которой равна $\sqrt{7}$, а высота боковой грани, опущенная на боковое ребро, — $\sqrt{5}$.

Решение. Пусть x — сторона основания. Тогда высота боковой грани, опущенная на основание, $h = \sqrt{7 + \frac{x^2}{12}}$. Площадь боковой грани $S = \frac{1}{2}x\sqrt{7 + \frac{x^2}{12}}$. Радиус описанной окружности $R = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Боковое ребро $l = \sqrt{7 + \frac{x^2}{3}}$. Тогда $S = \frac{1}{2}l\sqrt{5} = \frac{1}{2}\sqrt{35 + 5\frac{x^2}{3}}$. Получаем уравнение $x\sqrt{7 + \frac{x^2}{12}} = \sqrt{35 + 5\frac{x^2}{3}} \Rightarrow x^4 + 64x^2 - 420 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \sqrt{6} \Rightarrow l = \sqrt{7 + \frac{x^2}{3}} = 3$.

Ответ: $l = 3$.

8.43. Основание пирамиды — треугольник, одна сторона которого равна 8 дм, а разность двух других — 2 дм. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30°; высота боковой грани больше высоты пирамиды на 1 дм. Определите неизвестные стороны основания пирамиды.

Решение. Пусть OD — высота пирамиды $ABCD$, $|AB| = 8$, $|AC| - |BC| = 2$, M, N, K — точки касания вписанной окружности сторон AB, BC и AC. Обозначим $|AM| = x$, $|NC| = y$. Тогда $|AC| - |BC| = (x + y) - (y + 8 - x) = 2$. Отсюда $x = 5$. Далее $|OD| = \frac{|MD|}{2}$ и $|MD| - |OD| = 1$. Отсюда $|MD| = 2$ и $|MO| = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\angle MBO = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle MBO = 30° \Rightarrow \angle MBC = 60°$.

По теореме косинусов $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2\,|AB|\cdot|BC|\cdot\cos 60° \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (5 + y)^2 = 64 + (y + 3)^2 - 2\,(y + 3)8\,\frac{1}{2}$. Отсюда $y = 2$, $|AC| = x + y = 7$, $|BC| = (8 - x) + y = 5$.

Ответ: 5 и 7 дм.

8.44. Длина стороны правильного треугольника, лежащего в основании пирамиды, равна 3. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна основанию, а площади двух других боковых граней равны 5 и 4. На какие по величине отрезки высота пирамиды делит сторону основания?

Решение. Пусть ABC — основание пирамиды $ABCD$, $ABD \perp ABC$ и $h = |DE|$ — высота. Опустим перпендикуляры $EM \perp AC$ и $EN \perp BC$. Обозначим $|AE| = x$, $|DM| = h_1$, $|DN| = h_2$. Из подобия треугольников AME и ABK, где BK — высота, опущенная из вершины B на основание AC, имеем: $\frac{x}{|AB|} = \frac{|ME|}{|BK|} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{|ME|}{3\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow |ME| = \frac{2x}{\sqrt{3}}$. Аналогично находим

$|NE| = \frac{2}{\sqrt{3}}(3-x)$. Теперь из треугольников DME и DNE получим:

$|DE|^2 = h_1^2 - x^2\frac{3}{4} = h_2^2 - (3-x)^2\frac{3}{4} \Rightarrow h_2^2 - h_1^2 = \frac{27}{4} - \frac{9}{2}x$. По условию

площадь треугольника ADC равна 4, т. е. $\frac{1}{2}|AC|\,h_1 = 4 \Rightarrow 3h_1 = 8$.

Аналогично $3h_2 = 10$, откуда следует $\frac{27}{4} - \frac{9}{2}x = 4 \Rightarrow x = \frac{11}{18}$, $y = 3 - \frac{11}{18} = \frac{43}{18}$.

Ответ: $\frac{11}{18}$ и $\frac{43}{18}$.

■ Пирамиды

А

8.46. Определите высоту правильной шестиугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а косинус двугранного угла при боковом ребре равен 0,625.

Решение. Обозначим пирамиду $SABCDEF$, $|AC| = a\sqrt{3}$. Опустим из точек A и B перпендикуляры на ребро AS, т. е. $AM \perp SB$ и $CM \perp SB$. Обозначим $h = |AM| = |CM|$, $l = |SB|$, H — высота пирамиды. Тогда по теореме косинусов $3a^2 = 2h^2 + 2h^2 \cdot 0{,}625 \Rightarrow$

$h = \sqrt{\frac{12}{13}}a$. Вычислим площадь треугольника ABS двумя способами: 1) $S = \frac{1}{2}lh = \frac{1}{2}l\sqrt{\frac{12}{13}}a$; 2) $S = \frac{1}{2}a\sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}$. Отсюда $l = a\frac{\sqrt{13}}{2}$ и $H = \sqrt{a^2\frac{13}{4} - a^2} = \frac{3}{2}a$.

Ответ: $\frac{3}{2}a$.

Б

8.48. В правильной n-угольной пирамиде все ребра равны между собой. При каких значениях n это возможно?

Это возможно при $n = 3$, 4, 5, так как сумма плоских углов при вершине пирамиды должна быть меньше 360°.

■ Призмы

А

8.49. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами 45° и 30°. Найдите косинус угла между этими диагоналями.

Решение. Параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Диагонали DA' и AB' наклонены к плоскости основания под углами 45° и 30°. Обозначим длину бокового ребра через x. Тогда $|DA'| = x\sqrt{2}$, $|AB'| = 2x$. Пусть O и O_1 — центры основания и грани $ABB'A'$. Тогда $|OO_1| = \frac{x}{\sqrt{2}}$; $|OA| = x$; $|O_1A| = x$. Искомый угол $\angle OO_1A$ находим по теореме косинусов: $\cos\angle OO_1A = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\cos\angle OO_1A = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

8.51. Через диагональ AC квадрата $ABCD$, лежащего в основании прямоугольного параллелепипеда, и вершину B_1 другого основания параллелепипеда проведена плоскость так, что в сечении получился треугольник AB_1C с углом при вершине B_1, в два раза бóльшим, чем угол между плоскостью сечения и основанием параллелепипеда. Найдите угол AB_1C.

Решение. Обозначим $x = |AB|$, $y = |BB_1|$, O — центр основания, $\alpha = \angle BOB_1$, искомый угол $\beta = 2\alpha$.

Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{|OB|} = \dfrac{y\sqrt{2}}{x} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$.

Из треугольника AOB_1: $\sin^2\alpha = \dfrac{|AO|^2}{|AB_1|^2} = \dfrac{x^2}{2(x^2+y^2)} = \dfrac{1}{2\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)}$.

Обозначив $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = z\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = z$, получим уравнение

$\dfrac{1}{1+2z} + \dfrac{1}{2(1+z)} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow z = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \Rightarrow \cos\beta = \cos^2\alpha -$

$- \sin^2\alpha = \dfrac{1}{1+2z} - \dfrac{1}{2(1+z)} = \sqrt{5}-2$.

Ответ: $\arccos(\sqrt{5}-2)$.

Б

8.55. Стороны основания прямого параллелепипеда относятся как 2 : 7, бóльшая из диагоналей основания, равная $10\sqrt{3}$ см, образует с меньшей стороной основания угол 30°. Определите меньшую диагональ параллелепипеда, если боковая поверхность его равна 1080 см^2.

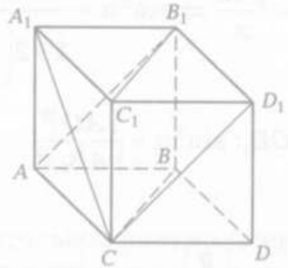
Решение. Параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Обозначим $x = |AB|$, $y = |BC|$, $z = |AA'|$, $\angle ACB = 30°$. По теореме косинусов

$x^2 = 300 + y^2 - 20\sqrt{3}y\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Учитывая, что $x = \dfrac{7}{2}y$. получаем уравнение для y, откуда $y = 4$, $x = 14$. Далее $2(xz + yz) = 1080 \Rightarrow z = 30$. По теореме косинусов находим $|BD|$ и затем $|DB'|$.

Ответ: 32 см.

8.56. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник со стороной 4. Прямые AB_1 и CA_1 перпендикулярны. Найдите высоту призмы.

Решение. Пристроим к призме $ABCA_1B_1C_1$ такую же призму так, чтобы грань CC_1B_1B была общей. Обозначим полученный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



Тогда $CD_1 \parallel AB_1 \Rightarrow A_1C \perp CD_1$ и $|A_1C| = |CD_1| = \sqrt{16 + h^2}$, где h — высота пирамиды. Далее, $|A_1D_1| = 4\sqrt{2} \Rightarrow 2(16 + h^2) = 48 \Rightarrow h = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

В

8.58. Определите стороны основания прямого параллелепипеда, объем которого равен 3 360 см^3, полная поверхность равна 1416 см^2, боковая поверхность 1 080 см^2 и бóльшая диагональ параллелепипеда 29 см.

Решение. Пусть S — площадь основания; x и y — стороны основания; α — острый угол между ними. По условию $2S + 1\,080 = 1416$, откуда $S = 168$. Тогда высота параллелепипеда $h = \dfrac{3\,360}{168} = 20$. Зная площадь основания и площадь боковой поверхности, можно составить уравнения: $xy \sin\alpha = 168$ и $2(x + y)h = 1\,080 \Rightarrow x + y = 27$.

Итак, получаем систему $\begin{cases} x + y = 27, \\ x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha = 29^2 - 20^2 = 441, \\ xy\sin\alpha = 168. \end{cases}$

Возводим первое уравнение в квадрат и вычитаем из второго.

$$\begin{cases} x + y = 27, \\ xy(1 - \cos\alpha) = 144, \\ xy\sin\alpha = 168 \end{cases} \Rightarrow \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{6}{7} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{6}{7} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{84}{85}.$$

Из третьего уравнения находим xy и получаем систему

$$\begin{cases} x+y=27, \\ xy=170 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=17, \\ y=10. \end{cases}$$

Ответ: 17 и 10 см.

8.60. В параллелепипеде все грани — равные ромбы с острым углом 60° и стороной a. Найдите:

а) диагонали параллелепипеда; б) его высоту; в) угол наклона бокового ребра к плоскости основания; г) угол между соседними гранями.

Решение. Пусть в параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$: $A'N$, $A'M$ — перпендикуляры, опущенные на основание параллелепипеда и ребро AB. Тогда $|AM|=\dfrac{a}{2}$, $|A'M|=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$|AN|=\dfrac{|AM|2}{\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $\cos\angle NAA'=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $|A'N|=a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$;

$|NM|=\dfrac{1}{2}|AN|=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Диагонали параллелепипеда находим по теореме косинусов.

Угол между гранями равен $\angle NMA'$, $\cos\angle NMA'=\dfrac{|NM|}{|A'M|}=\dfrac{1}{3}$.

Замечание. Мы нашли косинусы только острых углов, в то время как остальные углы наклона боковых ребер к плоскости основания и углы между соседними гранями — тупые, поэтому косинусы углов должны быть не только со знаком «+», но и со знаком «−».

Ответ: а) $a\sqrt{6}$, $a\sqrt{2}$; б) $a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; в) $\arccos\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$; г) $\arccos\left(\pm\dfrac{1}{3}\right)$.

■ Круглые тела

В

8.79. Периметр осевого сечения конуса равен p. Найдите угол при вершине осевого сечения, для которого объем конуса имеет наибольшее значение.

Указание. Эту задачу рекомендуется решать, после того как изучено исследование функций с помощью производной.

Решение. Пусть l, r — образующая и радиус конуса. По условию $2l + 2r = p$.

Объем $V = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2 - r^2} = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{\left(\frac{p}{2} - r\right)^2 - r^2} = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{\frac{p^2}{4} - pr}$;

$$V' = \frac{1}{3}\pi\left(2r\sqrt{\frac{p^2}{4} - pr} - r^2\frac{p}{2\sqrt{\frac{p^2}{4} - pr}}\right) = 0 \Rightarrow p - 5r = 0 \Rightarrow r\frac{p}{5} \Rightarrow$$

$$l = \frac{p}{2} - \frac{p}{5} = \frac{3p}{10};\ \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{l} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}.$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{9}$.

8.80. Вершина конуса находится в центре шара, а основание касается шара. Площадь полной поверхности конуса равна площади поверхности шара. Найдите угол между высотой конуса и его образующей.

Решение. По условию $\pi Rl + \pi R^2 = 4\pi r^2$ и $r^2 = l^2 - R^2$. Отсюда $Rl + R^2 = 4(l^2 - R^2)$, и, разделив уравнение на l^2, получаем $\sin\alpha + \sin^2\alpha = 4(1 - \sin^2\alpha)$; $\sin\alpha = 0{,}8$.

Ответ: $\arcsin 0{,}8$.

8.81. В треугольную пирамиду, в основании которой находится правильный треугольник со стороной a, вписан цилиндр так, что его нижнее основание находится на основании пирамиды, а верхнее касается всех боковых граней. Определите объем цилиндра и объем пирамиды, отсеченной плоскостью, проходящей через верхнее основание цилиндра, если известно, что высота цилиндра равна $\frac{a}{2}$, одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно плоскости основания, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α. Определите, при каких значениях α задача имеет решение.

Решение. Высота пирамиды равна $h = h_0\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}a\operatorname{tg}\alpha$, h_0 — высота основания пирамиды. Верхнее основание вписано в правильный треугольник со стороной a_1, которую находим из подобия треугольников:

$$\frac{a_1}{h-\frac{a}{2}}=\frac{a}{h}\Rightarrow a_1=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\alpha\frac{a}{2}(\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha-1)=a\left(1-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{3}}\right).$$

Отсюда радиус цилиндра $r=\frac{a_1}{2\sqrt{3}}=\frac{a}{2\sqrt{3}}\left(1-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{3}}\right)=\frac{a}{6}(\sqrt{3}-\operatorname{ctg}\alpha)$.

Объем цилиндра $V_{\text{цил}}=\frac{\pi r^2 a}{2}=\frac{\pi a^3}{72}(\sqrt{3}-\operatorname{ctg}\alpha)$.

Объем пирамиды $V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}Sh_1$, $S=\frac{a_1^2\sqrt{3}}{4}$, $h_1=h-\frac{a}{2}$. Решение существует при $\operatorname{ctg}\alpha<\sqrt{3}\Rightarrow\alpha>30°$.

Ответ: $\frac{\pi a^3}{72\operatorname{tg}^2\alpha}(\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha-1)^2$; $\frac{a^3\sqrt{3}}{72\operatorname{tg}^2\alpha}(\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha-1)^3$.

8.82. В равносторонний конус (конус, осевое сечение которого — равносторонний треугольник) вписан цилиндр. (Основание цилиндра находится на основании конуса, а окружность другого основания цилиндра лежит на поверхности конуса.) Этот цилиндр имеет наибольший возможный объем. Будет ли он иметь наибольшую возможную площадь поверхности?

Решение. Пусть h, r — высота и радиус цилиндра; R — радиус конуса. Тогда $\frac{h}{R-r}=\sqrt{3}\Rightarrow h=(R-r)\sqrt{3}$. Объем цилиндра и его площадь поверхности равны соответственно $\pi\sqrt{3}r^2(R-r)$ и $2\pi r^2+2\pi r\sqrt{3}(R-r)$. Наибольший объем достигается при $r=\frac{2R}{3}$, а площадь поверхности растет с увеличением $r=R$ (в этом случае $h=0$).

Ответ: не будет.

ГЛАВА 9
НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Содержание темы

Последовательности. Способы задания и свойства числовых последовательностей. *Понятие о пределе последовательности.*

Существование предела монотонной ограниченной последовательности. Суммирование последовательностей. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма.

Понятие о непрерывности функции. Производная. Понятие о производной функции, ее геометрический и физический смысл. Уравнение касательной к графику функции. Производные суммы, разности, произведения, частного. Производные основных элементарных функций. Применение производной к исследованию функций и построению графиков. *Производные обратной функции и композиции функции*.

Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах. Вторая производная, ее геометрический и физический смысл. Применение производной к исследованию функций и построению графиков. Нахождение скорости для процесса, заданного формулой и графиком.

Первообразная и интеграл.

Требования к результатам обучения

В результате освоения данной темы обучающийся должен *уметь*:

- находить производные элементарных функций;
- использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков;
- применять производную для проведения приближенных вычислений, решать задачи прикладного характера на нахождение наибольшего и наименьшего значений;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

- для решения прикладных задач, в том числе социально-экономических и физических, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения.

Примерное поурочное планирование

Содержание темы	Количество часов на тему (вариант программы)				
	24 (1)	16 (2)	32 (3)	40 (4)	12 (5)
Процесс и его моделирование	2	1	2	2	1

Соедржание темы	Количество часов на тему (вариант программы)				
	24 (1)	16 (2)	32 (3)	40 (4)	12 (5)
Последовательности	3	2	4	4	1
Понятие производной	2	2	2	2	1
Формулы дифференцирования	3	2	4	4	2
Производные элементарных функций	2	2	4	4	1
Применение производной к исследованию функций	4	2	6	8	2
Прикладные задачи	3	2	4	6	1
Первообразная	3	2	2	5	2
Беседа	—	—	1	1	—
Контроль усвоения	2	1	3	4	1

В данной теме имеется много алгоритмических моментов, что позволяет легче организовать учебную работу, тем более что запас задач на последовательности и использование производной практически неограничен. В то же время появилась опасность копирования облегченного вузовского курса, имеющего совсем другие задачи. Это объясняется, в частности, недостаточностью разработки методики изучения начал математического анализа, ориентированного прежде всего на ознакомление с важнейшей математической идеей в условиях, когда ограниченное число часов не позволяет сформировать устойчивые навыки ее использования.

Предлагаемое планирование рекомендует перенести центр тяжести на решение задач по использованию производной для исследования функций.

Определенным новым элементом программы является возврат к более детальному изучению последовательностей. Это представляется нам важным в связи с развитием дискретных методов и их связей с анализом.

Применение интеграла вынесено в отдельную главу.

Рекомендации по подготовке к контрольной работе

Вычисление производных

1) Повторить основные правила вычисления: таблица производных, линейная замена аргумента, арифметические действия.

2) Провести тренировку на использование правил: задать функцию $y = f(x)$ и предложить вычислить производные функций вида $f(3x)$; $-\frac{1}{2}f(x)$; $f(1-2x)$; $f^2(x)$; $f(2x)$; $f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

В качестве $f(x)$ взять: $2x^3 - 3x$; $\sqrt{x}$; $x^{-\frac{2}{3}}$; $\sin x$; $\cos x$.

Касательная

1) Провести тренировку на вычисление углового коэффициента касательной к графику одной и той же функции в разных точках, проследить за изменением уравнения касательной. Предложить преобразовывать уравнение касательной к виду $y = kx + b$.

$y = \cos 3x$; $y' = -3 \sin 3x$.

x	y	y'	Касательная
0	1	0	$y - 1 = 0$; $y = 1$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$; $y = -\frac{3\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$
$\frac{\pi}{6}$	0	-3	$y = -3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; $y = -3x + \frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$; $y = -\frac{3\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{9\sqrt{2}}{8}\pi$

2) Предложить задачу на нахождение точек, для которых известно значение производной или угол наклона касательной.

Например: $y = 1 + x - 2x^2$.

Дано: $y'(x) = -11$. *Найти* x. Решаем уравнение: $1 - 4x = -11$; $x = 3$.

Дано: угол наклона касательной в точке x равен $135°$. *Найти* x. Вычисляем $\operatorname{tg} 135° = -1$ и приходим к предыдущей задаче: $1 - 4x = -1$; $x = \frac{1}{2}$.

Исследование функции с помощью производной

1) Задать вопрос: что нужно знать о производной, чтобы определить промежутки монотонности и точки экстремумов функции?

2) Задать график производной и по нему провести исследование функции.

3) Задать вопрос: можно ли по графику производной найти нули самой функции. Провести исследование несложной кубической функции (например, $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 9$) с помощью производной.

Для выбранного примера: $y' = x^2 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 4$; $y' > 0$ при $x < 0$ и $x > 4$; $y' < 0$ при $0 < x < 4$.

При $x \in (-\infty; 0]$ функция y возрастает и принимает значения от $-\infty$ до $y(0) = 9$.

При $x \in [0; 4]$ функция y убывает и принимает значения от 9 до $y(4) = -\frac{5}{3}$.

При $x \geq 4$ функция y возрастает и принимает значения от $-\frac{5}{3}$ до $+\infty$.

В точке $x = 0$ — максимум, в точке $x = 4$ — минимум. Обратить внимание на то, что на каждом из трех интервалов функция y должна обращаться в нуль.

Один корень угадывается: $x = 3$; для нахождения двух других делим $x^3 - 6x^2 + 27$ на $x - 3$ и получаем квадратное уравнение $x^2 - 3x - 9 = 0$.

4) Повторить механический смысл производной.

Последовательность

9.1. Запишите первые шесть членов последовательности, заданной различными способами.

Б

4) a_n — n-я цифра после запятой числа $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Решение. $\sqrt{2}=1{,}4142135...$, $\sqrt{3}=1{,}7320508...$.

Находим $\sqrt{2}+\sqrt{3}=3{,}146264...$ и выписываем цифры после запятой.

В

1) a_n — n-е натуральное число, имеющее ровно три различных простых делителя.

Решение. Простые числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17. Составляем последовательность чисел a_n, считая произведение трех из них: $a_1 = 2\cdot3\cdot5 = 30$, $a_2 = 2\cdot3\cdot7 = 42$, $a_3 = 2\cdot3\cdot11 = 66$, $a_4 = 2\cdot5\cdot7 = 70$, $a_5 = 2\cdot3\cdot13 = 78$, $a_6 = 3\cdot5\cdot7 = 105$.

2) a_n — n-е натуральное число, представимое в виде суммы квадратов двух различных целых чисел.

Решение. Здесь есть два варианта составления последовательности. Нужно договориться, брать ли в качестве одного из целых чисел число 0. Если одно из слагаемых число 0, то составляем последовательность квадратов натуральных чисел; если число 0 не рассматривать (для суммы он нейтральный элемент), то получится следующая последовательность: $a_1 = 5$, $a_2 = 10$, $a_3 = 13$, $a_4 = 17$, $a_5 = 20$, $a_6 = 25$.

6) $a_n = (-1)^k$, где k — число различных простых делителей числа n.

Решение. $a_1 = (-1)^0 = 1$, $a_2 = (-1)^1 = -1$, $a_3 = (-1)^1 = -1$, $a_4 = (-1)^1 = -1$, $a_5 = (-1)^1 = -1$, $a_6 = (-1)^2 = 1$.

9) $a_{n+1} = \left[\sqrt{a_n}\right]$; $a_1 = 1000$.

Решение. $a_1 = 1000$, $a_2 = \left[\sqrt{1000}\right] = 31$ ($31^2 = 961$, $32^2 = 2^{10} = 1024$, $\sqrt{1000}-31$, ..., целая часть равна 31), $a_3 = \left[\sqrt{31}\right] = 5$, $a_4 = \left[\sqrt{5}\right] = 2$, $a_5 = \left[\sqrt{2}\right] = 1$, $a_6 = \left[\sqrt{1}\right] = 1$.

9.2. Для каждой последовательности, заданной несколькими первыми членами, предложите формулу общего члена, исследуйте ее следующие свойства: монотонность (с указанием характера монотонности), ограниченность, сходимость (существование предела и его значение).

А

1) $1, \frac{7}{3}, \frac{1}{9}, \frac{7}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$

Решение. $a_3 < a_2$ и $a_3 < a_4$, общий член можно задать формулой: $a_n = \frac{7^{n-2\left[\frac{n}{2}\right]}}{3^n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ограничена, так как все $a_n < 1$, [ ] — целая часть числа.

Замечание. В этом примере представляет дополнительный интерес запись показателя степени.

Б

1) $\frac{2+3}{1+1}, \frac{2^2+3^2}{2+3}, \frac{2^3+3^3}{2^2+3^2}, \frac{2^4+3^4}{2^3+3^3}, \ldots$

Решение. $a_n = \frac{2^n+3^n}{2^{n-1}+3^{n-1}}$;

$$\frac{a^{n+1}}{a^n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}}{\dfrac{2^n+3^n}{2^{n-1}+3^{n-1}}} = \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^{n-1}+3^{n-1}} = \frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 2+3\right)}{3^{n-2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot 2+3\right)} = 9 \cdot \frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+3\right)}{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+3\right)}.$$

Очевидно, что чем больше n, тем меньше числитель дроби отличается от знаменателя, т. е. a_n примерно в девять раз больше, чем a_{n-1}. Это означает, что последовательность монотонно возрастает. Аналогично можно доказать, что предел $a_n = 3$. Отсюда следует, что последовательность ограничена.

3) tg 1, tg 2, tg 3, ...

Решение. $a_n = \operatorname{tg} n$, так как тангенс — периодическая функция. Прибавляя по одному радиану, будем попадать в разные четверти, следовательно, тангенс будет менять знак, поэтому последовательность не является монотонной.

Кроме того, тангенс может принимать сколь угодно большие по модулю значения, поэтому последовательность не ограничена.

В

1) $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots$

Решение. $a_n = \sqrt[n]{n}$. Вычислим $\ln a_n = \dfrac{\ln n}{n}$. При больших n знаменатель растет быстрее числителя, поэтому дробь стремится к нулю, а a_n — к единице. Последовательность не является монотонной — достаточно подсчитать несколько первых членов последовательности, т. е. сначала она растет, а затем начинает убывать и стремиться к 1, поэтому последовательность ограничена.

■ Суммирование последовательностей

9.3. Вычислите сумму последовательности.

Решение. Примеры на вычисление суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \text{ где } |q| < 1.$$

А

1) $b_1 = 1;\ q = \dfrac{3}{4}$;

2) $b_1 = 1,\ q = -\dfrac{2}{5}$;

3) последовательность запишем в виде $4\left(1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \ldots\right)$, $b_1 = 1,\ q = \dfrac{1}{3}$;

4) данная последовательность представляет собой разность двух бесконечно убывающих прогрессий:

$$\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \ldots\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \ldots\right).$$

У первой прогрессии $b_1 = 1,\ q = \dfrac{1}{5}$, у второй — $b_1 = \dfrac{2}{3},\ q = \dfrac{2}{3}$.

Б

Примеры 1) — 3) — суммирование бесконечно убывающих геометрических прогрессий.

Приведем решение заданий 4) и 5).

4) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots$

Решение. Заметим, что $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Применяя это равенство к данной последовательности, получим:

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$

Частичная сумма $S_n=1-\frac{1}{n+1}$. При больших n частичная сумма неограниченно приближается к 1 или равна 1.

5) $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots$

Решение. Представим последовательность следующим образом:

$$\frac{1-1}{1!}+\frac{2-1}{2!}+\frac{3-1}{3!}+\frac{4-1}{4!}+\dots+\frac{n-1}{n!}+\dots=$$

$$=\left(\frac{1}{1!}+\frac{2}{2!}+\frac{3}{3!}+\frac{4}{4!}+\dots+\frac{n}{n!}+\dots\right)-\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n-1!}+\dots\right)-\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots\right).$$

Выражение в первой скобке равно $e-1$, а во второй — $(e-2)$. В результате получим $e-1-(e-2)=1$.

Ответ: 1.

■ Арифметическая прогрессия

При выполнении заданий на арифметическую прогрессию бывает полезно находить разность прогрессии по формуле $d=\frac{a_k-a_p}{k-p}$. Это возможно, если известны два члена прогрессии.

Б

9.6. 3) Пусть $a_5=3$, $a_8=11$ — члены арифметической прогрессии. Найдите a_7, a_4, d, S_6.

Решение. Заметим, что $a_8=a_5+3d$, отсюда $d=\frac{8}{3}$.

$a_7 = a_8 - d$, $a_4 = a_5 - d$, $a_6 = a_5 + d$, $a_1 = a_5 - 4d$, $S_6 = 3(a_1 + a_6)$.

Вычисляем: $a_7 = 11 - \frac{8}{3} = \frac{25}{3}$, $a_4 = \frac{1}{3}$, $a_6 = \frac{17}{3}$, $a_1 = -\frac{23}{3}$,

$S_6 = 3\left(-\frac{23}{3} + \frac{17}{3}\right) = -6$.

Задания уровня В (№ 9.7) выполняются аналогично.

1) Являются ли $a_2 = 1 + 3\sqrt{5}$, $a_4 = 1 + 7\sqrt{5}$, $a_{11} = 1 + 21\sqrt{5}$ членами арифметической прогрессии?

Решение. $d = \frac{a_4 - a_2}{2} = 2\sqrt{5}$; a_{11} должно равняться $a_2 + 9d$ или $a_4 + 7d$. Проверяем: $a_2 + 9d = 1 + 21d$, $a_4 + 7d = 1 + 21d$.

Ответ: являются.

5) Существует ли арифметическая прогрессия, у которой $S_3 = 7$, $a_2 = 2$?

Решение. $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 7$, $a_2 = 2$, $a_1 = a_2 - d$, $a_3 = a_2 + d$; $S_3 = 3a_2 = 6$.

Ответ: не существует.

Предел функции

9.11. Вычислите предел функции.

А

Предел в примере 1 вычисляем по формуле $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Примеры 2), 3) после сокращения дроби решаются аналогично; примеры 4), 5), 6) решаются одинаково: делим числитель и знаменатель дроби на бо́льшую степень x, а затем вычисляем предел по действиям.

Б

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin \frac{x}{2}}$.

Решение. Применяем «первый замечательный предел»: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=2.$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{x}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби умножаем на сопряженное выражение $\left(1+\sqrt{2x+1}\right)$ и сокращаем на x.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2^x}$.

Решение. Известно, что 2^x при $x\to\infty$ растет быстрее, чем x^2, поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2^x}=0$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}-\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x}\right)$.

Делим числитель и знаменатель первой дроби на $\sqrt{x^2}$, второй — на x^2 и вычисляем предел по действиям:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1}-\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)=0.$$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{\sin x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2x+1}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(2x+1)}{(1+\sqrt{2x+1})\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{1+\sqrt{2x+1}}\cdot\frac{x}{\sin x}=-1.$$

В

Для вычисления пределов используются те же идеи, что и в примерах уровней А и Б.

Применение производной функции

Задания этого раздела — задания на геометрический смысл производной. В основном они стандартные на применение следующих правил:

■ угловой коэффициент касательной k равен значению производной в точке касания; $k = f'(x_0)$. С другой стороны, касательная — это прямая, ее угловой коэффициент (число, стоящее перед x, если уравнение касательной записано в виде $y = kx + b$) равен:

$k = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, где $(x_1;\, y_1)$, $(x_2;\, y_2)$ — координаты точек, через которые проходит касательная;

■ если касательные параллельны, то их угловые коэффициенты равны; а если перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно -1;

■ в известном уравнении касательной $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ числа $(x_0;\, y_0)$ — координаты точки касания и $y_0 = f(x_0)$; $f'(x_0)$ — угловой коэффициент касательной, а $(x;\, y)$ — координаты точек, которые лежат на касательной.

Рассмотрим решение нескольких менее стандартных заданий уровня Б и В.

Б

9.18. 2) В каких точках графика функции $y = f(x)$ касательная параллельна прямой $y = kx + b$?

а) $f(x) = \sqrt{5x+1}$, $y = \dfrac{5x+1}{8}$.

Решение. $k = \dfrac{5}{8}$, $f'(x_0) = \dfrac{5}{8}$, $f(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x+1}}$.

Решаем уравнение: $\dfrac{5}{2\sqrt{5x_0+1}} = \dfrac{5}{8}$, $\sqrt{5x_0+1} = 4$, $x_0 = 3$, $y_0 = f(3) = 4$.

Ответ: в точке с координатами (3; 4).

3) В каких точках графика функции $y = f(x)$ касательная перпендикулярна прямой $y = kx + b$?

г) $f(x) = e^{-2x+3}$, $y = \dfrac{x-5}{2}$.

Угловой коэффициент прямой равен $\dfrac{1}{2}$, касательная перпендикулярна этой прямой, поэтому угловой коэффициент касательной равен -2, $f'(x_0) = -2$, $f'(x) = -2e^{-2x+3}$. Решаем уравнение: $-2e^{-2x_0+3} = -2$, $x_0 = 1{,}5$, $y_0 = 1$.

Ответ: (1,5; 1).

9.23. Какая из следующих прямых: $y = 2x + 1 - \frac{\pi}{6}$; $y = 3x + 1 - \frac{\pi}{4}$; $y = 6x + 1 - \frac{\pi}{2}$ является касательной к графику функции $y = \operatorname{tg} 3x$?

Решение. Найдем предполагаемые точки касания с каждой прямой: $f'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}$.

Решаем уравнения: $\frac{3}{\cos^2 3x_0} = 2$, $\frac{3}{\cos^2 3x_0} = 3$, $\frac{3}{\cos^2 3x_0} = 6$.

Для первой прямой x_0 — нет, для второй — $x_0 = \frac{\pi}{3}k$, $k \in \mathbf{Z}$, для третьей — $x_0 = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}n$, $n \in \mathbf{Z}$. Точка на графике функции с абсциссой x_0 имеет ординату $\operatorname{tg} 3x_0$ и является общей точкой графика функции и касательной. Проверяем равенства: для второй прямой: $\operatorname{tg}(\pi k) = 3\left(\frac{\pi}{3}k\right) + 1 - \frac{\pi}{4}$, $0 = \pi k + 1 - \frac{\pi}{4}$ — неверно ни при каких $k \in \mathbf{Z}$; для третьей прямой: $\operatorname{tg}\left(\pm\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = 6\left(\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}n\right) + 1 - \frac{\pi}{2}$;

$\pm 1 = \frac{1}{2}(\pm\pi + 4\pi n) + 1 - \frac{\pi}{2}$; при $n = 0$ получим верное равенство: $1 = \frac{1}{2}(\pi) + 1 - \frac{\pi}{2}$.

Ответ: третья прямая.

9.25. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{4 - 2x - x^2}$, проходящей через точку (3, 0).

Решение. В уравнение касательной $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ подставляем: $x = 3$, $y = 0$, $f'(x_0) = \frac{-2x_0 - 2}{2\sqrt{4 - 2x_0 - x_0^2}}$, $y_0 = \sqrt{4 - 2x_0 - x_0^2}$ и находим

x_0 — абсциссу точки касания: $\frac{(-x_0 - 1)(3 - x_0)}{\sqrt{4 - 2x_0 - x_0^2}} + \sqrt{4 - 2x_0 - x_0^2} = 0$,

$x_0 = \frac{1}{4}$, $y_0 = \frac{\sqrt{55}}{4}$, $f'(x_0) = \frac{-\sqrt{55}}{11}$.

Получим: $y = \frac{-\sqrt{55}}{11}\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{55}}{4} = \frac{\sqrt{55}(3 - x)}{11}$.

Ответ: $y=\dfrac{\sqrt{55}(3-x)}{11}$.

В

9.28. Через точку $A(-3;\ 1)$ проведена прямая, которая является касательной к графику данной функции. Определите угол наклона этой прямой к оси абсцисс: а) $y=\sqrt{8-x^2}$.

Решение. Аналогично 9.25. В уравнение касательной $y=f'(x_0)\times$ $\times(x-x_0)+y_0$ подставляем: $x=-3,\ y=1,\ f'(x_0)=\dfrac{-x_0}{\sqrt{8-x_0^2}},\ y_0=\sqrt{8-x_0^2}$ и находим x_0: $\dfrac{-x_0(-3-x_0)}{\sqrt{8-x_0^2}}+\sqrt{8-x_0^2}=1$, откуда $x_0=-2$; $\operatorname{tg}\alpha=$ $=f'(-2)=1$; $\alpha=45°$.

Ответ: 45°.

9.32. Подберите параметр a так, чтобы касательная к графику функции $y=1-ax^2$ в точке пересечения с осью абсцисс была наклонена к ней под углом 120°.

Решение. $\alpha=120°$, $\operatorname{tg}120°=-\sqrt{3}=f'(x_0)\Rightarrow f'(x_0)<0$, x_0 находим из уравнения $1-ax^2=0$, которое имеет корни только при $a>0$: $x^2=\dfrac{1}{a}$, $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{a}}$. У параболы $y=1-ax^2$, $a>0$, производная отрицательна на правой ветви, значит, $x_0=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$. Решаем уравнение: $f'(x_0)=-\sqrt{3}\Leftrightarrow -2ax_0=-\sqrt{3}\Rightarrow 2\sqrt{a}=\sqrt{3}\Rightarrow a=\dfrac{3}{4}$.

Ответ: $a=\dfrac{3}{4}$.

9.34. Найдите уравнение такой касательной к графику функции $y=x^3+2x+2$, для которой существует параллельная касательная к графику функции $y=\sin 2x$.

Решение. У параллельных касательных угловые коэффициенты равны, x_0 могут быть различными. Величина углового коэффициента в точке x к первой функции равна $3x^2+2\ge 2$, ко второй — $2\cos 2x \le 2$. Одинаковое значение возможно, если оно равно 2: $3x_0^2 + 2 = 2 \Rightarrow x_0 = 0$, $f'(0) = 2$, $f'(0) = 2$. Уравнение касательной: $y = 2x + 2$.

9.36. Найдите уравнение прямой, касающейся графика функции $y = x^4 - 4x^3$ в двух различных точках.

Решение. Пусть x_1, x_2 — абсциссы точек касания. Тогда $y(x_1) = x_1^4 - 4x_1^3$, $y(x_2) = x_2^4 - 4x_2^3$. Угловой коэффициент k касательной равен $k = \dfrac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1}$. С другой стороны, он равен $y'(x_1) = 4x_1^3 - 12x_1^2$ и $y'(x_2) = 4x_2^3 - 12x_2^2$. Получаем систему для неизвестных x_1, x_2:

$$\begin{cases} y'(x_1) = y'(x_2), \\ \dfrac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{1}{2}(y'(x_2) + y'(x_1)). \end{cases}$$

Во втором уравнении справа можно было поставить $y'(x_1)$ или $y'(x_2)$, а полусумма производных взята ради симметрии системы.

Подставляем выражения для функций и производных и сокращаем на $(x_2 - x_1)$: $\begin{cases} x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 = 3(x_2 + x_1), \\ (x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2) = 2(x_2^3 + x_1^3) - 6(x_2^2 + x_1^2). \end{cases}$

Вводим новые неизвестные $u = x_2 + x_1$, $v = x_2x_1$:

$$\begin{cases} u^2 - v = 3u, \\ u(3u - v) = 2u(3u - 2v) - 6(3u - v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 - v = 3u, \\ 3u^2 - uv - 6u + 2v = 0. \end{cases}$$

Получаем два решения (6, 18) и (2, –2) и, следовательно, две системы для x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ x_1x_2 = 18; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1x_2 = -2. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений. Решая вторую систему, получаем $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$ и вычисляем $y(1 - \sqrt{3}) = -12 + 8\sqrt{3}$ и $y'(1 - \sqrt{3}) = -8$.

Уравнение касательной $y - y(x_2) = y'(x_2)(x - x_2) \Rightarrow y = -8(x - 1 + \sqrt{3}) - 12 + 8\sqrt{3} \Rightarrow y = -8x - 4$.

9.39. Найдите уравнения касательных к графику функции $y = \frac{x^2+1}{x}$, каждая из которых вместе с осями координат ограничивает треугольник площадью 2.

Решение. Составляем уравнение касательных в общем виде: $k = f'(x_0) = \frac{x_0^2-1}{x_0^2}$, $y_0 = \frac{x_0^2+1}{x_0^2}$, тогда уравнение касательных будет иметь вид: $y = \frac{x_0^2-1}{x_0^2}(x-x_0) + \frac{x_0^2+1}{x_0^2}$. По условию $x_0 \neq 0$ и $x_0^2 - 1 \neq 0$ (касательные пересекают оси Ox и Oy).

Точка пересечения с осью Ox: $x = \frac{-2x_0}{x_0^2-1}$, с осью Oy: $y = \frac{2}{x_0}$.

$S_\Delta = \frac{1}{2}|xy| = 2$, $|xy| = 4$, тогда $|x_0^2 - 1| = 1$, $x_{0_1} = 0$ не входит в область определения функции; $x_{0_2}^2 = 2$; получаем две точки касания $x_{0_{1,2}} = \pm\sqrt{2}$. Тогда $y_0 = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$, $f'(x_0) = \frac{1}{2}$.

Уравнение касательных: $y = \frac{1}{2}\left(x \pm \sqrt{2}\right) \pm \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{2}$.

Ответ: $y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{2}$.

Остальные задания уровня В выполняются по стандартному алгоритму на составление уравнения касательной или аналогично разобранным.

■ Исследование функции с помощью производной

При решении заданий этого раздела применяются правила взаимосвязи свойств функции и производной. Рассмотрим решение заданий с параметром.

Б

9.41. 2) При каких значениях параметра a функция $y = f(x)$ будет монотонна на области определения?

Указание. Для нахождения значений a нужно рассмотреть неравенство $f'(x) \geq 0$, которое выполняется для всех значений x из области определения.

а) $f(x) = x^3 + ax$.

Решение. Неравенство $3x^2 + a \geq 0$ ($f'(x)$) верно при всех действительных x при $a \geq 0$ ($y = 3x^2 + a$ — парабола с вершиной в точке $(0; a)$ и не имеет отрицательных значений).

б) $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax$.

Решение. $3x^2 - 4x + a \geq 0$. Парабола $y = 3x^2 - 4x + a$ не имеет отрицательных значений, если $D = 16 - 12a \leq 0$. Получаем $a \geq \frac{4}{3}$.

в) $f(x) = e^x - ax$.

Решение. $e^x - a \geq 0$. Неравенство $e^x \geq a$ верно для всех действительных значений x, если $a \leq 0$.

г) $f(x) = \sin x + ax$.

Решение. $\cos x + a \geq 0$. Неравенство $\cos x \geq -a$ верно при всех действительных значениях x, если $-a \leq -1$, т. е. $a \geq 1$.

В

9.42. 2) Определите, при каком значении параметра функция $y = f(x)$ обладает указанным свойством.

Решаем аналогично заданиям из 9.41, 2).

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + (a-1)x^2 + 2$ монотонно возрастает на множестве действительных чисел.

Решение. $x^2 + 2(a-1)x \geq 0$, $x(x + 2(a-1)) \geq 0$. Неравенство верно для всех действительных значений x, если $x_1 = x_2 = 0$, т. е. $a = 1$.

б) $f(x) = -x^3 + 3bx^2 + 3(a-1)x - 1$ возрастает только на интервале $(3; 4)$.

Решение. Неравенство $-3x^2 + 6bx + 3(a-1) \geq 0$, равносильное неравенству $x^2 - 2bx - a - 1 \leq 0$, имеет решение $3 < x < 4$. Это возможно, когда один из корней квадратного трехчлена равен 3, а другой — 4. $x_1x_2 = 1 - a$, $x_1 + x_2 = 2b$. Отсюда: $a = 1 - 12 = -11$, $b = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$.

в) $f(x) = x^3 + 3bx^2 - 3(a-1)x - 1$ убывает только на интервале $(-3; -2)$.

Решение. $3x^2 + 6bx - 3(a-1) \le 0$ — на промежутке $-3 < x < -2$. Решаем аналогично: $x_1 + x_2 = -2b$, $x_1 x_2 = 1 - a$, $x_1 = -3$, $x_2 = -2$; $-2b = -5$, $b = 2{,}5$; $1 - a = 6$, $a = -5$.

г) $f(x) = (a+2)\,x^3 + 6x^2 + (a+3)\,x - 1$ убывает на всей области определения.

Решение. $3(a+2)x^2 + 12x + a + 3 \le 0$ — для всех действительных x. Это возможно, если $a + 2 < 0$ и $D \le 0$. Решаем систему:

$$\begin{cases} a+2<0, \\ 144-12(a+2)(a+3)\le 0; \end{cases} \begin{cases} a<-2, \\ a^2+5a-6\ge 0; \end{cases} a \le -6.$$

■ Экстремумы функции

9.43. Определите, имеет ли функция $y = f(x)$ экстремумы. Найдите их.

Б

3) $f(x) = x + \dfrac{1}{1+x^2}$.

Решение. $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$. Очевидно, при $x \le 0$ $f'(x) > 0$. Пусть $x > 0$.

Тогда из известного неравенства $\dfrac{2x}{1+x^2} \le 1$ следует $\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} \le 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow f'(x) \ge 0$. Значит, экстремума нет.

Ответ: экстремума нет.

■ Непрерывность функции

А

9.46. Найдите точки разрыва функции. Постройте эскиз графика функции.

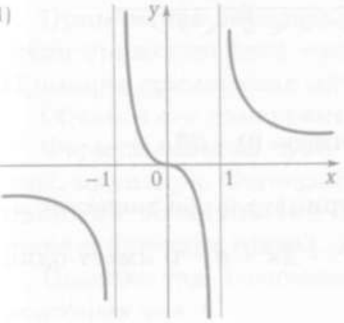
1) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$; 2) $y = \dfrac{x-1}{x^2}$; 3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x-1|}}$; 4) $y = \operatorname{tg}\sqrt{4-x^2}$.

Указание. Для построения эскиза графика функции прикидываем устно некоторые свойства: ООФ, нули, асимптоты, четность, поведение функции в точках разрыва, значения функции в нескольких точках и пр.

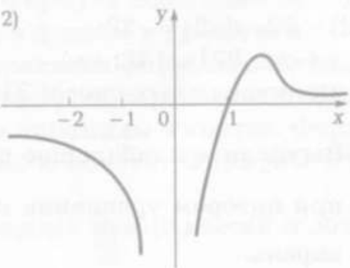
Решение. 1) Функция нечетная, проходит через начало координат, асимптоты: $x = \pm 1$, $y = 0$, при $x > 1$ функция принимает положительные значения, при $x \in (0;\ 1)$ — отрицательные. Строим эскиз графика.

2)—4). Аналогично.

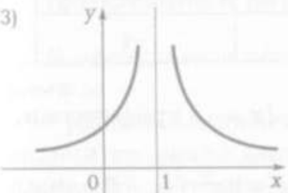
1)



2)



3)



4)

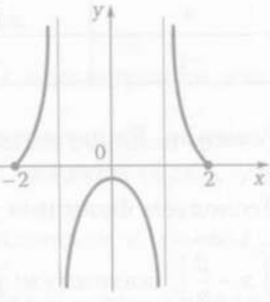


График симметричен относительно прямой $x = 1$.

Четная функция, точки разрыва $x = \pm\dfrac{\sqrt{16 - \pi^2}}{2}$.

Наибольшее и наименьшее значения функции

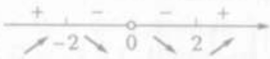
Б

9.69. Сколько существует целых чисел, которые не входят в множество значений функции $y = x^3 + \dfrac{48}{x}$?

а	б	в	г
1	63	151	Таких точек нет

Решение. Заметим, что функция нечетная. Определим промежутки монотонности функции и экстремумы:

$$y' = 3x^3 - \frac{48}{x^2} = \frac{3(x^2+4)(x-2)(x+2)}{x^2}.$$

Схема поведения функции: 

$y(2) = 32$, $y(-2) = -32$;

$E_y = (-\infty; -32] \cup [32; +\infty)$.

Количество целых чисел: $31 \cdot 2 + 1$ (число 0) $= 63$.

9.70. Вычислите наибольшее целое отрицательное значение a, при котором уравнение $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + a = 0$ имеет один корень.

а	б	в	г
−1	−2	−3	−4

Решение. Решаем уравнение $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x = -a$ графически.

Исследуем функцию $y = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$: $y' = 3x^2 + x - 2 = 3(x + 1)\left(x - \frac{2}{3}\right)$, максимум: $y(-1) = 1{,}5$; минимум: $-y\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{22}{27}$.

Эскиз графика:

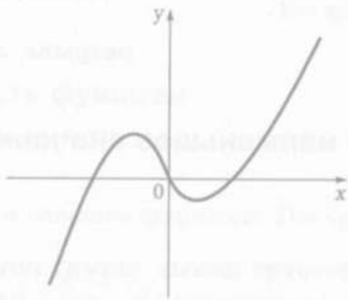


График функции пересекается с горизонтальной прямой $y = -a$ в одной точке при $-a < -\frac{22}{27}$ или при $-a > 1{,}5$, т. е. $a \in (-\infty; -1{,}5) \cup \left(\frac{22}{27}; +\infty\right)$.

Ответ: −1.

ГЛАВА 10

ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Содержание темы

Применение определенного интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции. Формула Ньютона—Лейбница. Примеры применения интеграла в физике и геометрии.

Объем и его измерение. Интегральная формула объема.

Формулы объема куба, прямоугольного параллелепипеда, призмы, цилиндра. Формулы объема пирамиды и конуса. Формулы площади поверхностей цилиндра и конуса. Формулы объема шара и площади сферы.

Подобие тел. Отношения площадей поверхностей и объемов подобных тел.

Требования к результатам обучения

В презультате освоения данной темы обучающийся должен *уметь*:

- решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);
- вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

- для вычисления объемов и площадей поверхностей пространственных тел при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства.

Примерное поурочное планирование

Содержание темы	Количество часов на тему (вариант программы)				
	16 (1)	8 (2)	16 (3)	20 (4)	6 (5)
Площади плоских фигур	4	2	4	5	1
Теорема Ньютона — Лейбница	5	2	5	6	2
Пространственные тела	4	3	4	6	2

Содержание темы	Количество часов на тему (вариант программы)				
	16 (1)	8 (2)	16 (3)	20 (4)	6 (5)
Беседа	1	—	1	1	—
Контроль усвоения	2	1	2	2	1

Интеграл как понятие математического анализа изучается в этой теме фактически в ознакомительном плане. Нет возможности заниматься сколько-нибудь детально вычислением интегралов. Для основных применений интеграла при вычислении геометрических величин достаточно минимальной техники интегрирования.

Рекомендуется главное внимание обратить на содержание самой идеи интегрирования как восстановления некоторой величины по ее плотности. Полезно привести запись физических законов в интегральной форме и вообще позаботиться о связи с физикой и, возможно, с прикладными техническими дисциплинами.

Рекомендации по подготовке к контрольной работе

■ Вычисление площади фигуры, ограниченной графиками функций

1) Ограничиться фигурами, границы которых составлены из графиков линейных и квадратичных функций.

2) Для тренировки предложить *задачу*: дана парабола $y = -x^2 + 2x + 3$, которая пересекается одной из трех прямых: $y = -5$; $y + 5 = 9x$; $y + 5 = -5x$. В каком случае площадь отсекаемой фигуры будет наибольшей?

Можно разбить группу на три подгруппы для вычисления одного из трех вариантов.

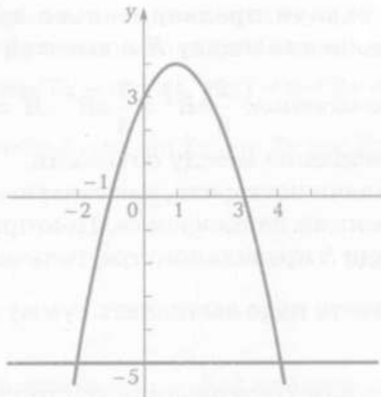
а) $y = -5$. Точки пересечения с параболой: $-x^2 + 2x + 3 = -5$; $x^2 - 2x - 8 = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 = 4$;

б) $y = 9x - 5$; $x^2 + 7x - 8 = 0$; $x_1 = -8$; $x_2 = 1$;

в) $y = -5x - 5$; $x^2 - 7x - 8 = 0$; $x_1 = 8$; $x_2 = -1$.

Дальнейшие вычисления необходимо сопроводить построением графиков.

а) $y = -5$.



$$S=\int_{-2}^{4}(-x^2+2x+3-(-5))\,dx=\int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)\,dx=$$

$$=-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{4}+x^2\Big|_{-2}^{4}+8\cdot 6=$$

$$-\frac{64}{3}-\frac{8}{3}+16-4+48=36;$$

б) $y=9x-5$.

$$S=\int_{-8}^{1}(-x^2-7x+8x)\,dx=-\frac{x^3}{3}\Big|_{-8}^{1}-\frac{7x^2}{2}\Big|_{-8}^{1}+$$

$$+8\cdot 9=-\frac{1}{3}-\frac{512}{3}-\frac{7-7\cdot 64}{2}+72=121{,}5;$$

в) $y=-5x-5$.

$$S=\int_{-8}^{1}(-x^2+7x+8x)\,dx=-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{8}+\frac{7x^2}{2}\Big|_{-1}^{8}+$$

$$+8\cdot 9=-\frac{513}{3}+\frac{7\cdot 63}{2}+72=121{,}5.$$

■ Нахождение площадей и объемов без применения интегралов

1) Провести тренировку на решение задач, аналогичных тем, которые предложены в контрольной работе.

2) Для данной задачи предварительно выяснить, каково должно быть соотношение между R и высотой конуса H, чтобы получить равенство объемов: $\frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H \Rightarrow H = 2R$. Можно задать другое соотношение между объемами.

3) Для данной задачи повторить, как связаны площадь фигуры с площадью ее проекции на плоскость. Повторить формулы для нахождения площади S правильного треугольника. Заметить, что для нахождения ответа надо вычислить сумму: $S + \frac{S}{\cos 60^\circ} = 3S$. Ответ в общем виде для треугольника со стороной a: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $3S = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

Рекомендации по решению задач

Большинство задач требует лишь знания основных формул для вычисления первообразных, а в геометрических приложениях необходимо знание формул для вычисления площадей плоских фигур, а также объемов пространственных тел и площадей их поверхностей.

■ Первообразные

10.1. Вычислите первообразные данных функций.

B

9) Вычислите первообразную функции $8\sin^4 2x$.

Решение. Преобразуем функцию $\sin^4 2x = 3 - 4\cos 4x + \cos 8x$.

Поэтому первообразная: $3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x$.

Ответ: $3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x$.

10.3. Найдите значения k, при которых функция $y = f(x)$ является первообразной для функции $y = g(x)$.

Б

4) $f(x) = k\left(\frac{1}{7}\cos 7x + \cos x\right)$, $g(x) = \sin 2x \cos 3x \cos 2x$.

Решение. Преобразуем: $\sin 2x \cos 3x \cos 2x = \frac{1}{4}(\sin 7x + \sin x)$. Отсюда $k = -\frac{1}{4}$.

Ответ: $k = -\frac{1}{4}$.

10.4. Для данной функции $y = f(x)$ найдите первообразную, график которой касается прямой $y = kx + b$.

В

1) $f(x) = (1 - x)(x - 2)^2$, $y = -2x - 1$.

Решение. Пусть $F(x)$ — первообразная. По условию $F'(x) = f(x) = -2 \Rightarrow (1 - x)(x - 2)^2 = -2 \Rightarrow x = 3$, $y = -2 \cdot 3 - 1 = -7$. Значит, точка касания $(3; -7)$. Найдем $F(x)$:

$f(x) = -x^3 + 5x^2 - 8x + 4 \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^2 - 4x^2 + 4x + C$. По условию $F(3) = -7 \Rightarrow C = \frac{401}{4}$.

Ответ: $F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^2 - 4x^2 + 4x + \frac{401}{4}$.

10.5. Вычислите интегралы.

В

5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} 6\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} 6\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} 3\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right)\right)dx =$$

$$= 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} \left(1 + \sin(6x)\right)dx = 1 + \frac{3}{8}\pi.$$

Ответ: $1+\frac{3}{8}\pi$.

10.8. Вычислите объем тела двумя способами:

а) непосредственно, пользуясь формулами для вычисления объема;

б) с помощью интегральной формулы для вычисления объема.

А

Рассмотрим вычисление объема с помощью интегральной формулы.

2) Треугольная пирамида, в основании — правильный треугольник со стороной 1, высота пирамиды равна 6.

Решение. Объем $V=\int_a^b S(x)\,dx$, где $S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью, параллельной основанию. В данной задаче x — расстояние от секущей плоскости до основания. Из подобия сечения и основания следует $\frac{S(x)}{S_{\text{осн}}}=\left(\frac{6-x}{6}\right)^2 \Rightarrow S(x)=S_{\text{осн}}\left(\frac{6-x}{6}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{144}(6-x)^2$.

Отсюда $V=\frac{\sqrt{3}}{144}\int_0^6 (6-x)^2\,dx=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ГЛАВА 11

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Содержание темы

Элементы теории вероятностей

Событие, вероятность события, сложение и умножение вероятностей. *Понятие о независимости событий. Дискретная случайная величина, закон ее распределения. Числовые характеристики дискретной случайной величины. Понятие о законе больших чисел.*

Элементы математической статистики

Представление данных (таблицы, диаграммы, графики), *генеральная совокупность, выборка, среднее арифметическое, медиана. Понятие о задачах математической статистики.*

Решение практических задач с применением вероятностных методов.

Требования к результатам обучения

В результате освоения данной темы обучающийся должен *уметь*:

- вычислять в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

- для анализа реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков;
- анализа информации статистического характера.

Примерное поурочное планирование

Содержание темы	Количество часов на тему (вариант программы)				
	12 (1)	14 (2)	12 (3)	12 (4)	12 (5)
Вероятность и ее свойства	4	4	4	4	4
Повторные испытания	4	4	4	4	4
Случайная величина	2	3	2	2	2
Беседа	1	2	1	1	1
Контроль усвоения	1	1	1	1	1

Данная тема является достаточно новой для школьного курса. Должен пройти значительный срок, прежде чем устоится методика его изучения. На данном этапе речь может идти лишь об ознакомительном характере ее изучения. В то же время именно в процессе получения начального и среднего профессионального образования независимо от характера будущей профессии важно познакомиться с постановкой задач теории вероятностей и математической статистики, возможностями использования стохастических методов в профессиональной деятельности. Вот почему предполагается практически одинаковый объем изучения этой темы для всех вариантов планирования. Необходимый дополнительный материал должен быть перенесен в специальные курсы.

Решение задач наиболее реально сосредоточить вокруг классического определения вероятности и соответствующих задач комбинаторики.

Рекомендации по решению задач

Прежде чем решать задачи, нужно потренироваться в понимании того, что такое эксперимент, его случайные исходы (элементарные события), как получаются сложные события из элементарных. Для каждого случайного события необходимо научиться определять благоприятные и неблагоприятные события, научиться подсчитывать общее количество всех элементарных событий и количество благоприятных из них для данного сложного события.

Полезно вспомнить, как решаются комбинаторные задачи, в частности задачи с использованием правила произведения, а также задачи, в которых нужно подсчитать количество размещений, перестановок и сочетаний, и применить это к задачам, относящимся к классическому определению вероятности.

■ Классическое определение вероятности

А

11.2. В урне 10 белых и 26 черных шаров. Из урны вынимаются сразу два шара. Найдите вероятность того, что эти шары будут разных цветов.

Решение. Эксперимент — вытаскивание двух шаров. Событие A — вытащить два шара разных цветов. Всего возможных исходов $n = C_{36}^2 = 630$, благоприятных исходов, т. е. исходов, в результате которых будут вытащены разноцветные шары (произойдет событие A): $m = 10 \cdot 26 = 260 \Rightarrow p(A) = \frac{260}{630} = \frac{26}{63}$.

Ответ: $\frac{26}{63}$.

11.3. Задумано двузначное число. Найдите вероятность того, что задуманным числом окажется:

а) случайно названное двузначное число.

Решение. Двузначных чисел — 90, а задумано одно, следовательно, $p = \frac{1}{90}$;

б) случайно названное двузначное число, цифры которого различны.

Решение. Случайно названных двузначных чисел с различными цифрами — 81, а задумано одно, следовательно, $p = \frac{1}{81}$.

Ответ: а) $\frac{1}{90}$; б) $\frac{1}{81}$.

11.4. Брошены две игральные кости. Найдите вероятности следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна 6.

Решение. Сумма выпавших очков, равная 6, возможна в случаях $1 + 5$, $2 + 4$, $3 + 3$, $4 + 2$, $5 + 1$ — итого имеем 5 благоприятных исход, а всего вариантов 36.

б) сумма выпавших очков равна 8, а разность 3.

Решение. Такая ситуация невозможна: $2 + 6 = 8$, $6 - 2 = 4$, $3 + 5 = 8$, $5 - 3 = 2$, $4 + 4 = 8$, а $4 - 4 = 0$, других вариантов нет.

Ответ: а) $\frac{5}{36}$; б) 0, так как это невозможно.

11.5. В коробке шесть одинаковых, занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекаются все кубики. Найдите вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в убывающем порядке.

Ответ: $\frac{1}{6!}$.

11.8. В классе 12 учеников, среди которых 5 отличников. По списку наудачу отобраны 9 учеников. Найдите вероятность того, что среди отобранных учеников три отличника.

Решение. Выбрать 9 учеников из 12 можно C_{12}^9 способами, т. е. всего имеется $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 220$ вариантов. Благоприятных вариантов, т. е. когда выбрано 3 отличника из 5 человек и 6 учеников из оставшихся 7, равно $C_5^3 \cdot C_7^6 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7}{6} = 70 \Rightarrow p = \frac{70}{220} = \frac{7}{22}$.

Ответ: $\frac{7}{22}$.

11.9. В коробке пять одинаковых деталей, причем три из них золотые. Наудачу извлечены два изделия. Найдите вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно золотое изделие; б) два золотых изделия; в) хотя бы одно золотое изделие.

Ответ: а) $\frac{2\cdot 3}{C_5^2}=\frac{3}{5}$; б) $\frac{3}{C_5^2}=\frac{3}{10}$; в) $\frac{3}{5}+\frac{3}{10}=\frac{9}{10}$.

11.11. На карточках написаны целые числа от 1 до 15. Наудачу извлекаются две карточки. Какова вероятность того, что сумма цифр, написанных на этих карточках, будет равна 10?

Решение. Всего вариантов для выбора карточек — $C_{15}^2=105$, а благоприятных вариантов 4: (1 + 9), (2 + 8), (3 + 7), (4 + 6), поэтому искомая вероятность равна $\frac{4}{C_{15}^2}=\frac{4}{105}$.

Ответ: $\frac{4}{105}$.

Б

11.16. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

Ответ: а) $\frac{8^2\cdot 6}{1\,000}=0{,}384$; б) $\frac{8\cdot 12}{1\,000}=0{,}096$; в) $\frac{8}{1\,000}=0{,}008$.

11.17. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 13 стандартных; во втором — 30 деталей, из них 26 стандартных; в третьем — 10 деталей, из них 7 стандартных. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика стандартная.

Решение. Вероятность выбрать один ящик из трех равна $\frac{1}{3}$. Если выбран первый ящик, то вероятность выбрать из него стандартную деталь равна $\frac{13}{20}$, поэтому вероятность выбрать первый ящик и из него стандартную деталь равна $\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{20}$. Аналогично вероятность выбрать второй ящик и из него стандартную деталь равна $\frac{1}{3}\cdot\frac{26}{30}$, вероятность выбрать третий ящик и из него стандартную деталь равна $\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}$. Таким образом, вероятность выбрать стандартную деталь из какого-нибудь ящика равна $\frac{1}{3}\left(\frac{13}{20}+\frac{26}{30}+\frac{7}{10}\right)=\frac{133}{180}$.

Ответ: $\frac{133}{180}$.

11.19. На девяти карточках написаны цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Две из них вынимаются наугад и укладываются на стол в порядке появления, затем читается полученное число, например 7 (семь), 14 (четырнадцать) и т. п. Найдите вероятность того, что число будет четным.

Решение. Первую карточку можно вытащить 9 способами, а вторую — 8 способами, так как одной карточки уже нет — всего $9\cdot 8 = 72$ исхода. Четное число можно получить, если первое число будет четным и второе четным ($5\cdot 4 = 20$) или первое число будет нечетным, а второе четным ($4\cdot 5 = 20$). Итого получили 40 благоприятных исходов, следовательно, вероятность, что число будет четным, равна $\frac{40}{72}=\frac{5}{9}$.

Ответ: $\frac{5}{9}$.

11.22. Из полного набора 28 костей домино наудачу извлечена одна кость. Найдите вероятность того, что вторую извлеченную наудачу кость можно приставить к первой.

Решение. Если 1-я кость — дубль, то к ней можно приставить 6 костей. Получаем $7\cdot 6 = 42$ варианта. Если 1-я кость — не дубль (таких костей 21), то к ней можно приставить 12 костей. Получаем $21\cdot 12 = 252$ варианта. Общее число пар костей (с учетом порядка их извлечения) равно $28\cdot 27$, следовательно, вероятность того, что вторую извлеченную наудачу кость можно приставить к первой, равна $\frac{42+252}{28\cdot 27}=\frac{7}{18}$.

Ответ: $\frac{7}{18}$.

11.23. На разные клетки шахматной доски произвольным образом поставили две ладьи (белую и черную). Что вероятнее: окажутся ладьи под ударом друг друга или нет?

Решение. Ладьи бьют друг друга, когда они находятся на одной вертикали или на одной горизонтали. Таких пар клеток: $8 \cdot C_8^2 + 8 \cdot C_8^2 = 16 \cdot C_8^2$, а всего пар клеток C_{64}^2. Вероятность, что ладьи будут под ударом, равна $\frac{16 \cdot C_8^2}{C_{64}^2} = \frac{2}{9}$, а для противоположного события — $1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

Ответ: вероятнее, что ладьи не будут под ударом.

11.26. Имеется две урны: в первой 10 белых и 27 черных шаров; во второй 25 белых и 10 черных. Из каждой урны вынимается по шару. Найдите вероятность того, что оба шара будут белыми.

Ответ: $\frac{10 \cdot 25}{37 \cdot 35} = \frac{50}{259}$.

11.27. Два охотника одновременно увидели лису и одновременно выстрелили в нее. Предположим, что каждый из охотников на таком расстоянии обычно в одном случае из пяти попадает в лису и убивает ее. Какова вероятность того, что лиса будет убита?

Решение. Вероятность, что один охотник убьет лису при одном выстреле, равна $\frac{1}{5}$, вероятность, что он промахнется, — $\frac{4}{5}$, вероятность, что оба промахнутся, — $\left(\frac{4}{5}\right)^2$, следовательно, вероятность, что хоть один попадет, — $1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} = 0{,}36$.

Ответ: 0,36.

B

11.29. В соревнованиях по футболу участвуют 20 команд. Случайным образом они делятся на две группы по 10 команд.

Какова вероятность того, что две наиболее сильные команды при этом окажутся в одной группе?

Ответ: $\dfrac{2\cdot C_{18}^{8}}{C_{20}^{10}}$.

11.30. На один ряд, состоящий из 7 мест, случайным образом садятся 7 учеников. Найдите вероятность того, что три определенных ученика окажутся рядом.

Решение. Выбрать 3 места рядом из данных 7 мест можно пятью способами. После того, как они выбраны, для трех учеников возможны 3! варианта рассадки. Для оставшихся четырех учеников возможны 4! варианта, следовательно, вероятность того, что три определенных ученика окажутся рядом, равна $\dfrac{5\cdot 4!\cdot 3!}{7!}=\dfrac{1}{7}$.

Ответ: $\dfrac{1}{7}$.

Следующая задача аналогична.

11.31. Пусть n девочек и n мальчиков рассаживаются случайным образом в ряду из $2n$ мест. Какова вероятность того, что никакие две девочки не окажутся рядом? Чему равна вероятность того, что все девочки будут сидеть рядом?

Решение. Всего имеется $(2n)!$ вариантов рассаживания. Если никакие две девочки не окажутся рядом, то мальчики и девочки должны чередоваться. Поэтому число таких вариантов равно $2(n!)^2$ (множитель 2 нужен, так как ряд может начинаться как с мальчиков, так и с девочек). Во втором случае ответ похожий: девочки произвольным образом занимают n мест рядом ($n!$ вариантов), начиная с любого места (от первого до $(n+1)$-го). Остальные места занимают мальчики (также $n!$ вариантов).

Замечание. Учитывались варианты, зависящие от того, как рассядутся на своих местах девочки и мальчики. На самом деле можно было решать задачу, не различая мальчиков и девочек между собой: девочки могут выбрать любые n мест из $2n$ (C_{2n}^{n} вариантов), а благоприятными, когда девочки сядут рядом, будет $(n+1)$ вариант, следовательно, искомая вероятность равна $\dfrac{n+1}{C_{2n}^{n}}$, что то же самое.

Ответ: $\dfrac{2(n!)^2}{(2n)!}$; $\dfrac{(n+1)(n!)^2}{(2n)!}$.

11.32. В урне 12 белых и 24 черных шаров. Из урны в случайном порядке, один за другим, вынимают все находящиеся в ней шары. Найдите вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

Ответ: $\frac{12}{36}\cdot\frac{11}{35}+\frac{24}{36}\cdot\frac{12}{35}=\frac{1}{3}$.

11.33. Из колоды карт (52 карты) Германн (опера «Пиковая дама») наугад извлекает три карты. Найдите вероятность того, что это будет тройка, семерка и туз произвольной масти.

Ответ: $\frac{4^3}{C_{52}^3}$.

11.34. 10 пассажиров случайным образом размещаются в трех вагонах (при этом возможно, что в один или два вагона никто не сел). Какова вероятность того, что в какой-нибудь из вагонов сядет 6 человек, в другой — 3 и в третий — 1?

Ответ: $\frac{C_{10}^6\cdot C_4^3}{3^{10}}$.

Повторные испытания

А

11.35. Монета брошена два раза. Найдите вероятность того, что хотя бы один раз появится «орел».

Решение. Проще вычислить вероятность противоположного события «ни разу не появился орел» — $\frac{1}{2^2}$. Тогда искомая вероятность равна $1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

11.37. Радист трижды вызывает корреспондента, причем последующий вызов производится при условии, что предыдущий вызов не принят. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,3, второй — 0,4 и третий — 0,5. Найдите вероятность вызова корреспондента.

Ответ: $0{,}3 + (1 - 0{,}3)\cdot 0{,}4 + (1 - 0{,}3)(1 - 0{,}4)\cdot 0{,}5 = 0{,}79$.

11.38. На стеллаже 15 учебников, 5 из них в переплете. Наудачу выбираются 3 учебника. Какова вероятность, что хотя бы один из них будет в переплете?

Решение. Проще подсчитать, что не было ни одного учебника в переплете — $\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}$, и результат вычесть из 1, чтобы получить вероятность противоположного события, т. е. того, что хотя бы один из них будет в переплете: $1-\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=\frac{67}{91}$.

Ответ: $\frac{67}{91}$.

Б

11.40. Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,7, вторым — 0,6. Найдите вероятность того, что хотя бы один из стрелков попал в мишень.

Решение. Аналогично вычисляем вероятность противоположного события (ни один стрелок не попал в мишень) и вычитаем из 1: $1-(1-0,7)(1-0,6)=0,88$.

Ответ: 0,88.

В

11.43. Два баскетболиста независимо друг от друга производят по 4 броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча в корзину соответственно равны 0,7 и 0,4. Определите вероятность того, что: а) у обоих баскетболистов будет равное количество попаданий; б) у первого баскетболиста будет больше попаданий.

Решение. а) Вероятности m попаданий для первого и второго баскетболистов равны соответственно $P_m = C_4^m \cdot 0,7^m \cdot 0,3^{4-m}$ и $Q_m = C_4^m \cdot 0,4^m \cdot 0,6^{4-m}$. Тогда вероятность одинакового числа попаданий равна $\sum\limits_{m=0}^{4} P_m \cdot Q_m = 0,4^4 \cdot 0,7^4 + 4 \cdot 0,7^3 \cdot 0,3 \cdot 4 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6 + 6 \cdot 0,7^2 \cdot 0,3^2 \cdot 6 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^2 + 4 \cdot 0,7 \cdot 0,3^3 \cdot 4 \cdot 0,4 \cdot 0,6^3 + 0,3^4 \cdot 0,6^4 = 0,19$.

б) Нужно вычислить вероятность того, что у первого баскетболиста будет одно попадание из четырех, а у второго — ни одного;

или у первого — два попадания, а у второго — ни одного или одно; или у первого — три попадания, а у второго — ни одного, или одно, или два; или, наконец, у первого — четыре попадания, а у второго — ни одного, одно, два или три.

$$P_1Q_0 + P_2(Q_0 + Q_1) + P_3(Q_0 + Q_1 + Q_2) + P_4(Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3).$$

Аналогичный подсчет показывает, что вероятность того, что у первого баскетболиста будет больше попаданий, равна 0,71.

11.44. Известно, что при 10-кратном бросании монеты 5 раз выпал «орел» и 5 раз «решка». Какова вероятность того, что все «орлы» выпали при первых пяти бросаниях?

Решение. Всего возможных исходов с пятью «орлами» — C_{10}^5.

Из них только один благоприятный, следовательно, $p = \dfrac{1}{C_{10}^5}$.

Ответ: $\dfrac{1}{C_{10}^5}$.

11.45. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в десятку, равна 0,6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,8 он попал в десятку хотя бы один раз?

Решение. Находим n из неравенства $1 - (1 - 0{,}6)^n \geq 0{,}8$.

Ответ: 2.

11.46. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,1. Найдите вероятность того, что: а) из трех проверенных изделий только одно окажется нестандартным; б) нестандартным окажется только четвертое по порядку проверенное изделие.

Ответ: а) $C_3^1 \cdot (0{,}1)^1 \cdot (0{,}9)^2$; б) $(0{,}9)^3 \cdot 0{,}1$.

11.47. Монета бросается до тех пор, пока 2 раза подряд она не выпадает одной и той же стороной. Найдите вероятности следующих событий: а) A — понадобится меньше шести бросаний; б) B — потребуется четное число бросаний.

Решение. а) Пусть событие о — выпадение «орла», событие р — выпадение «решки». обозначим A_1 = оо + роо + ороо + ророо, A_2 = рр + орр + ропр + орорр.

Очевидно, $A = A_1 + A_2$; $p(A) = 2p(A_1) = 2\,[(0{,}5)^2 + (0{,}5)^3 + (0{,}5)^4 + (0{,}5)^5]$.

Ответ: $1 - (0{,}5)^4$.

б) Обозначим $B_1 = OO + PP$; $B_2 = OPOO + POPP$, ..., B_m — серия из $2m$ бросаний, которая закончилась двумя «орлами» или двумя «решками»:

$$p(B) = p(B_1) + p(B_2) + p(B_3) + \ldots + p(B_m) + \ldots = 2[0{,}25 + (0{,}25)^2 + (0{,}25)^3 + \ldots + (0{,}25)^m + \ldots] = 2 \cdot \frac{0{,}25}{1 - 0{,}25} = \frac{2}{3}.$$

11.48. Вероятность наступления после ясного дня опять ясного дня равна p_1, а пасмурного $(1 - p_1)$. Вероятность наступления после пасмурного дня снова пасмурного дня равна p_2, а ясного $(1 - p_2)$. Сегодня ясно. Какова вероятность того, что послезавтра будет: а) A — ясно; б) B — пасмурно?

Решение. Обозначим я — ясно, п — пасмурно, тогда A = яя + пя; B = яп + пп.

Ответ: а) $p(A) = (p_1)^2 + (1 - p_1)(1 - p_2)$;

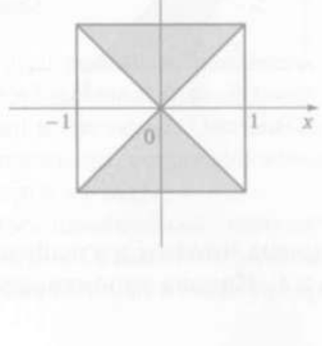
б) $p(B) = p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1)$.

Геометрическая вероятность

Указание. В рассматриваемых здесь задачах вероятность подсчитывается как отношение площадей фигур, одна из которых соответствует благоприятным исходам, а другая — всем возможным исходам.

А

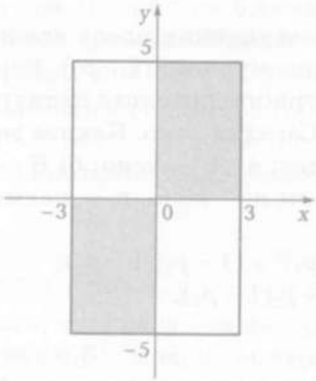
11.49. Два действительных числа x и y выбираются наудачу так, что $|x| \le 1$ и $|y| \le 1$. Какова вероятность того, что $|x| < |y|$?



Ответ: 0,5.

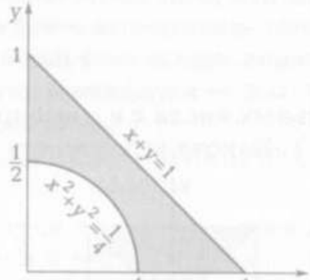
Б

11.50. Два действительных числа x и y выбираются наудачу так, что $|x| \leq 3$, $|y| \leq 5$. Какова вероятность того, что дробь $\dfrac{x}{y}$ окажется положительной?



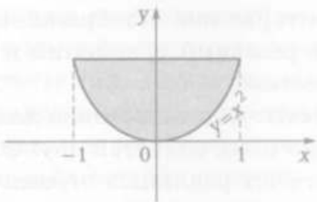
Ответ: 0,5.

11.51. Наудачу взяты два положительных числа x и y, не превышающие единицы. Какова вероятность того, что их сумма не превышает единицы, а сумма их квадратов больше $\dfrac{1}{4}$?



Ответ: $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{16}$.

11.52. Два действительных числа x и y выбираются наудачу так, что $|x| \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Какова вероятность того, что $x^2 < y$?



Ответ: $\frac{2}{3}$.

B

11.53. В течение 20 минут ученик A в случайный момент звонит домой по телефону ученику B и ждет 2 минуты, после чего кладет трубку. В течение тех же 20 минут в случайный момент времени ученик B приходит домой, где остается в течение 5 минут, после чего уходит. Какова вероятность того, что разговор состоится?

Решение. Пусть A звонит в момент x, а B приходит домой в момент y. По условию $y - x \le 2$ и $x - y \ge 5$. Получаем систему неравенств $\begin{cases} -5 \le y - x \le 2, \\ 0 \le x \le 20, \\ 0 \le y \le 20. \end{cases}$

Точки, удовлетворяющие системе, заполняют фигуру, площадь которой равна 125,5, следовательно, вероятность того, что разговор состоится, равна $\frac{125{,}5}{400} = 0{,}31375$.

Ответ: 0,31375.

ГЛАВА 12

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Содержание темы

Равносильность уравнений, неравенств, систем.

Рациональные, иррациональные, показательные и тригонометрические уравнения и системы. Основные приемы их решения (разложение на множители, введение новых неизвестных, подстановка, графический метод).

Рациональные, иррациональные, показательные и *тригонометрические неравенства*. Основные приемы их решения. Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств. Метод интервалов. Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений и неравенств с двумя переменными и их систем.

Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учет реальных ограничений.

Требования к результатам обучения

В результате освоения данной темы обучающийся должен *уметь*:

- решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичные неравенства и системы;
- использовать графический метод решения уравнений и неравенств;
- изображать на координатной плоскости решения уравнений, неравенств и систем с двумя неизвестными;
- составлять и решать уравнения и неравенства, связывающие неизвестные величины в текстовых (в том числе прикладных) задачах.
- *использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни*:
- для построения и исследования простейших математических моделей.

Примерное поурочное планирование

Содержание темы	Количество часов на тему (вариант программы)				
	20 (1)	20 (2)	32 (3)	32 (4)	12 (5)
Равносильность уравнений	4	4	4	4	2
Основные приемы решения уравнений	4	4	8	8	3
Системы уравнений	4	4	6	6	2
Решение неравенств	5	5	8	8	3
Беседа	1	1	2	2	—
Контроль усвоения	2	2	4	4	2

Данная тема является завершающей темой программы и на ее основе проводится повторение курса и подготовка к итоговой государственной аттестации. Изучение темы полезно начать с повторения и закрепления общих понятий, связанных с уравнениями и неравенствами, включая понятие равносильности. Дальнейший материал богато обеспечен как нашим УМК, так и огромным количеством дидактических материалов.

Рекомендации по решению задач

■ Замена переменной

12.3. Решите уравнение.

B

2) $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$.

Решение. Заметим, что $\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)^2=\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}-\frac{8}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}-8\right)$.

Обозначим: $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=t$, тогда $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=3t^2+8$. Решаем уравнение: $3t^2+8=10t,\ t_1=\frac{4}{3},\ t_2=2$.

$\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=\frac{4}{3},\ x_1=6,\ x_2=-2;\ \frac{x}{3}-\frac{4}{x}=2,\ x_{1,2}=3\pm\sqrt{21}$.

6) $8^x+18^x=2\cdot 27^x$.

Решение. Уравнение однородное. Разделим обе части уравнения на 27^x. Получим: $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x}+\left(\frac{2}{3}\right)^x-2=0,\ \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x=t\right]\Rightarrow t^3+t-2=$ $=(t^3-1)+(t-1)=(t-1)(t^2+t+2)=0$ при $t=1$, отсюда $x=0$.

7) $x(x^2+1)=x^2+(x^2+1)^2$.

Решение. Уравнение однородное. Разделим обе части уравнения на $(x^2+1)^2$. В результате получим уравнение: $\frac{x}{x^2+1}+6\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2-1=0\ \left[\frac{x}{x^2+1}=t\right]$, уравнение $6t^2+t-1=0$ имеет корни: $t_1=-\frac{1}{2},\ t_2=\frac{1}{3}$.

Для t_1: $\frac{x}{x^2+1} = -\frac{1}{2}$, $x^2 + 2x + 1 = 0$, $x = -1$.

Для t_2: $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$, $x^2 - 3x + 1 = 0$, $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

8) $x^2 + x\sqrt{x-3} + x - 3 = 0$.

Решение. Уравнение однородное. Делим обе части на x^2, $x \neq 0$: $\left(\frac{\sqrt{x-3}}{x}\right)^2 + \frac{\sqrt{x-3}}{x} + 1 = 0$; $t = \frac{\sqrt{x-3}}{x}$. Получим квадратное уравнение $t^2 + t + 1 = 0$, которое не имеет корней.

12.4. Решите уравнение.

Б

4) $x^2 + 2x + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+x+1}{x+1}$.

Решение. ОДЗ: $x \neq -1$. Найдя разность, получим уравнение: $x^2 + 2x + \frac{1}{x+1} - \frac{x^2+x+1}{x+1} = 0$, $x^2 + x = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ не входит в ОДЗ.

6) $3\left(x + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$.

Решение. ОДЗ: $x \neq 0$. Запишем уравнение в виде: $\frac{3(x^3+1)}{x^2} - \frac{7(x+1)}{x} = 0$. Один корень виден сразу: $x = -1$. Сократив на $x + 1$, решаем уравнение: $\frac{3(x^2-x+1)}{x^2} - \frac{7}{x} = 0$, $3x^2 - 10x + 3 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = 3$.

7) $10x^2(x-2)^2 = 9(x^2 + (x-2)^2)$.

Решение. Запишем уравнение в виде, удобном для замены: $10(x^2-2x)^2 = 9(2x^2 - 4x + 4)$ $[x^2 - 2x = t]$, уравнение $5t^2 - 9t - 18 = 0$ имеет корни $t_1 = 3$, $t_2 = -1{,}2$.

Для $t_1 = 3$ урвнение $x^2 - 2x - 3 = 0$ имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 3$; для $t_2 = -1{,}2$ уравнение $x^2 - 2x + 1{,}2 = 0$ корней не имеет.

8) $\frac{x^2+1}{3x^2-2x} = 2x$.

Решение. ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq \frac{2}{3}$.

Приводим к целому виду и раскладываем на множители:

$6x^3 - 5x^2 - 1 = (x^3 - 1) + 5(x^3 - x^2) = (x - 1)(6x^2 + x + 1) = 0$, откуда $x = 1$.

В

2) $\frac{(x^2+1)^2}{x(x+1)^2} = \frac{625}{112}$.

Решение. ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq -1$.

Приводим уравнение к однородному: $112\,(x^2 + 1)^2 = 625x\,(x^2 + 1) + 1\,250x^2$, делим на $(x^2 + 1)^2$. Получим уравнение: $1\,250p^2 + 625p - 112 = 0$, где $p = \frac{x}{x^2+1}$. Проще решать приведенное уравнение: $p^2 + \frac{1}{2}p - \frac{112}{1\,250} = 0$; откуда $p_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \frac{39}{100} \cdot p_1 = \frac{7}{50}$, $p_2 = -\frac{16}{25}$.

Для $p_1 = \frac{7}{50}$ решаем $\frac{x}{x^2+1} = \frac{7}{50}$, получим $x_1 = 7$, $x_2 = \frac{1}{7}$; для $p_2 = -\frac{16}{25}$ уравнение $\frac{x}{x^2+1} = -\frac{16}{25}$ корней не имеет.

4) $(x - 2)^4 + (x + 1)^4 = 17$.

Решение. Прибавим к обеим частям уравнения выражение $2\,(x - 2)^2(x + 1)^2$. Получим уравнение: $(2x^2 - 2x + 5)^2 = 17 + 2\,(x^2 - x - 2)^2$ $[t = x^2 - x]$, $(2t + 5)^2 = 17 + 2(t - 2)^2$, откуда $t_1 = 0$, $t_2 = -14$.

Для $t = 0$ уравнение $x^2 - x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; для $t = -14$ уравнение $x^2 - x = -14$ решений не имеет.

6) $\frac{x}{x^2+7x+1} = \frac{x^2+8x+1}{x^2+6x+1}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель каждой из дробей на x, $x \neq 0$.

Получим уравнение: $\frac{1}{x+7+\frac{1}{x}} = \frac{x+8+\frac{1}{x}}{x+6+\frac{1}{x}}$ $\left[x + \frac{1}{x} = t\right]$, уравнение $\frac{1}{t+7} = \frac{t+8}{t+6}$ корней не имеет.

7) $(x^2-6x-9)^2=x^3-4x^2-9x$.

Решение. Делим обе части уравнения на x^2, $x=0$ не является корнем уравнения.

Получим: $\left(x-6-\dfrac{9}{x}\right)^2=x-4-\dfrac{9}{x}$ $\left[x-\dfrac{9}{x}=t\right]$, $(t-6)^2=t-4$, $t^2-13t+40=0$, $t_1=5$, $t_2=8$.

$x-\dfrac{9}{x}=5$, $x^2-5x-9=0$, $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{61}}{2}$; $x-\dfrac{9}{x}=8$, $x^2-8x-9=$ $=0$, $x_1=-1$, $x_2=9$.

12.5. Решите уравнение.

Б

6) $\sqrt{x-7}-\dfrac{21}{\sqrt{x-7}}+\sqrt{2x}=0$.

Решение. ОДЗ: $x>7$.

Приведем к целому виду: $x-28+\sqrt{2x(x-7)}=0$, $\sqrt{2x(x-7)}=28-x$, возводим в квадрат, заметив, что $28-x\geq 0$, получим квадратное уравнение $x^2+42x-28^2=0$.

$x_{1,2}=-21\pm\sqrt{21^2+28^2}=-21\pm 7\sqrt{3^2+4^2}$, $x_1=14$, $x_2=-56$ — не входит в ОДЗ.

Ответ: 14.

7) $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$.

Решение. ОДЗ: $x\in\mathbf{R}$. Возводим в квадрат обе части уравнения $\sqrt{3x^2-2x+15}=7-\sqrt{3x^2-2x+8}$. Получим уравнение-следствие $\sqrt{3x^2-2x+8}=3$, тогда $3x^2-2x-1=0$, $x_1=1$, $x_2=-\dfrac{1}{3}$. Оба корня удовлетворяют уравнению.

В

3) $6x^2+7x\sqrt{1+x}=24(1+x)$.

Решение. ОДЗ: $x\geq -1$. Однородное уравнение, делим на x^2; $x=0$ не является корнем уравнения.

Получим уравнение: $24\left(\frac{\sqrt{1+x}}{x}\right)^2-\frac{7\sqrt{1+x}}{x}-6=0$ $\left[\frac{\sqrt{1+x}}{x}=t\right]$;

уравнение $24t^2-7t-6=0$ имеет корни $t_1=\frac{2}{3}$, $t_2=-\frac{3}{8}$.

Для $t_1=\frac{2}{3}$ уравнение $\frac{\sqrt{1+x}}{x}=\frac{2}{3}$ имеет корень $x=3$.

Для $t_2=-\frac{3}{8}$ уравнение $\frac{\sqrt{1+x}}{x}=-\frac{3}{8}$ имеет корень $x=-\frac{8}{9}$.

5) $x^2-4x+32=16\sqrt{x}$.

Решение. Заменим $\sqrt{x}=t$, $t\ge 0$ и решаем полученное уравнение $t^4-4t^2-16t+32=0$ разложением на множители; $t=2$ является корнем уравнения, выделяем множитель $(t-2)$; $t^4-4t^2-16t+32=(t-2)^2(t^2+4t+8)=0$, тогда $t=2$, $x=4$.

7) $\frac{25-9x}{3}+\left(\sqrt{3x-2}-3\right)\left(\sqrt{3x-2}+1\right)=2$.

Решение. ОДЗ: $x\ge\frac{2}{3}$. Заметим, что $\frac{25-9x}{3}=\frac{25}{3}-3x$. Упрощаем левую часть, получим уравнение: $\sqrt{3x-2}=\frac{2}{3}$, тогда $x=\frac{22}{27}$.

9) $x-2\sqrt{x\sqrt{x-1}+2}+2=0$.

Решение. Введем обозначение $t=\sqrt{x-1}$, получим уравнение: $t^2+3=2\sqrt{t^3+t+2}$, возводим в квадрат, получим возвратное уравнение $t^4-4t^3+6t^2-4t+1=0$; делим на t^2 $(t\ne 0)$, тогда $\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)^2-4\left(t+\frac{1}{t}\right)+4=0$, $\left(\left(t+\frac{1}{t}\right)-2\right)^2=0$, откуда $t+\frac{1}{t}-2=0$, $t=1$, $x=2$.

12.6. Решите уравнение.

Б

4) $2\lg^2 x+\lg x^2=2\sqrt{2}+\sqrt{2}\lg x^2$.

Решение. ОДЗ: $x>0$.

Решаем разложением на множители: $2\lg x(\lg x+1)-2\sqrt{2}\times$ $\times(\lg x+1)=0$, $2(\lg x+1)(\lg x-\sqrt{2})=0$, тогда $\lg x=-1$ или $\sqrt{2}$, $x=0{,}1$ или $x=10^{\sqrt{2}}$.

В

3) $3^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}=2^{2x^2-6x+3}$.

Решение. Однородное уравнение $27(3^{x^2-3x})^2+6\cdot6^{x^2-3x}=$ $=8(2^{x^2-3x})^2$, делим на $(2^{x^2-3x})^2$, получим квадратное уравнение $27z^2+6z-8=0$, где $z=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^2-3x}>0$; корни $z_1=\dfrac{4}{9}$, $z_2=-\dfrac{2}{3}$ не удовлетворяют условию $z>0$. Уравнение $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^2-3x}=\dfrac{4}{9}$ имеет корни: $x_1=1$, $x_2=2$.

4) $(6-\sqrt{35})^x+(6+\sqrt{35})^x=142$.

Решение. Заметим, что $(6-\sqrt{35})(6+\sqrt{35})=1$, тогда решаем уравнение $t+\dfrac{1}{t}=142$, где $t=(6-\sqrt{35})^x$; $t_{1,2}=71\pm12\sqrt{35}=(6\pm\sqrt{35})^2$, $x=\pm2$.

7) $5^{3\lg x}=\dfrac{25}{2}x$.

Решение. ОДЗ: $x>0$. Логарифмируем по основанию 10. Получим: $\lg x\lg125=\lg\dfrac{25}{2}+\lg x$, $\lg x=\dfrac{\lg\frac{25}{2}}{\lg125-1}=1$, $x=10$.

8) $16^{\frac{x-1}{x}}\cdot5^x=100$.

Решение. ОДЗ: $x\neq0$. Логарифмируем по основанию 10. Получим: $\dfrac{x-1}{x}\lg16+x\lg5=2$, $(\lg5)x^2+x(\lg16-2)-\lg16=0$, $(\lg5)x^2+2x\lg\dfrac{2}{5}-4\lg2=0$, $\dfrac{D}{4}=\left(\lg\dfrac{2}{5}\right)^2+4\lg2\lg5=1$, тогда

$x_1=\dfrac{\lg\frac{5}{2}+1}{\lg5}=2$, $x_2=\dfrac{\lg\frac{5}{2}-1}{\lg5}=\log_5 0{,}25=-2\log_5 2$.

9) $\log_2 \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\log_2 x} = \dfrac{4}{3}$.

Решение. Обозначим $\log_2 x = t$, получим уравнение: $t + 3\sqrt[3]{t} - 4 = 0$, которое решаем разложением на множители: $(t-1) + 3(\sqrt[3]{t} - 1) = 0$, $(\sqrt[3]{t} - 1)(\sqrt[3]{t^2} + \sqrt[3]{t} + 4) = 0$, тогда $t = 1$, $x = 2$.

■ Тригонометрические уравнения

12.7. Решите уравнение. В ответе укажите корни (в градусах), расположенные на заданном промежутке.

Б

1) $1 + \dfrac{\cos 2x}{\sin x} = \dfrac{1 + \cos 2x \sin x}{\sin x}$.

Решение. ОДЗ: $\sin x \neq 0$. Обозначим $\sin x = t$ и решаем уравнение $t + (1 - 2t^2) = 1 + t\,(1 - 2t^2)$, которое приводится к виду $t^2(t - 1) = 0$, $t \neq 0$ по ОДЗ, решаем $\sin x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) $1 + \operatorname{tg} 2x = \dfrac{1 - \sin 2x}{\cos^2 2x}$.

Решение. ОДЗ: $\cos 2x \neq 0$. Приводим к целому виду и раскладываем на множители. Получим уравнение: $\sin 2x\,(\sin 2x - \cos 2x - 1) = 0$, тогда $\sin 2x = 0$ или $\sin 2x - \cos 2x = 1$; первая серия $x = \dfrac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbf{Z}$; $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ — вторая серия ответов не удовлетворяет ОДЗ; третья серия — $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$ входит в первую.

4) $2\sin^2 3x + \sqrt{3}\sin 6x - 1 = 2\cos 3x$.

Решение. Понижаем степень синуса, получаем уравнение: $\sqrt{3}\sin 6x - \cos 6x = 2\cos 3x$, делим на 2 и применяем формулы: $\cos 3x + \cos\left(6x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$, $2\cos\left(4{,}5x + \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(1{,}5x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0$,

$x = \dfrac{2\pi}{27}(3n + 1)$, $n \in \mathbf{Z}$; $x = \dfrac{2\pi}{9}(3k + 1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

7) $\sin 2x - \dfrac{\sin 4x}{4\cos^2 x} = 1.$

Решение. ОДЗ: $\cos x \neq 0$. Заметим, что $4\cos^2 x = 2(1 + \cos 2x)$, приводим уравнение к целому виду: $2\sin 2x + \sin 4x - \sin 4x = 2 + 2\cos 2x$, $\sin 2x - \cos 2x = 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Две серии решений: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z};\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}$ — не входит в ОДЗ.

9) $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4} + \operatorname{ctg}\dfrac{3x}{4} = 2\sin x.$

Решение. Приводим к целому виду и применяем формулы. Получим уравнение: $\sin x = 2\sin x \sin\dfrac{x}{4}\sin\dfrac{3x}{4}$, тогда $\sin x = 0$, $x = \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$, или $2\sin\dfrac{x}{4}\sin\dfrac{3x}{4} = 1$. Второе уравнение приводим к виду: $\cos\dfrac{x}{2} - \cos x = 1$. Обозначим $\cos\dfrac{x}{2} = t$, получим квадратное уравнение $2t^2 - t = 0$; $t_1 = 0,\ t_2 = \dfrac{1}{2}$; $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 4\pi m$, $m \in \mathbf{Z}$.

Рассмотрим ОДЗ: $\sin\dfrac{x}{4}\sin\dfrac{3x}{4} \neq 0 \Leftrightarrow \cos\dfrac{x}{2} - \cos x \neq 0,\ \ x \neq \dfrac{4\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Решения второго уравнения удовлетворяют ОДЗ.

Серия решений $x = \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$, удовлетворяют ОДЗ, кроме $x = 4\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$, и содержит в себе серию $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{3} + 4\pi m,\ m \in \mathbf{Z};\ \pi n,\ n \neq 4k,\ k \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{Z}$.

■ Решение неравенств

12.8. Решите неравенство.

Указание. Неравенства из этого задания почти все решаются методом интервалов.

Приведем решение одного из них.

В

9) $x^2 + \dfrac{4x^2}{(x+2)^2} < 5.$

Решение. ОДЗ: $x \neq -2$. Приведем неравенство к виду $\dfrac{x^2(x+2)^2 + 4x^2 - 5(x+2)^2}{(x+2)^2} < 0$. Числитель дроби раскладываем на множители: $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 20x - 20 = (x+1)(x-2)(x^2 + 5x + 10)$.

Решаем методом интервалов: 

Ответ: (–1; 2).

Иррациональные неравенства

12.9. Решите неравенство.

В

6) $\dfrac{x-1}{2} > \sqrt{\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{4}}.$

Решение. Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{4} \geq 0, \\ x \geq 1, \\ \left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2 > \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} |x| \leq \dfrac{4}{\sqrt{3}}, \\ x \neq 0, \\ x \geq 1, \\ (x-2)(x^3 + 4x + 8) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq \dfrac{4}{\sqrt{3}}, \\ x > 2. \end{cases}$$

Заметим, что $\dfrac{4}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{16}{3}} > 2$ и при $x \geq 1$ множитель $x^3 + 4x + 8$ положителен.

Ответ: $\left(2; \dfrac{4}{\sqrt{3}}\right]$.

Логарифмические и показательные неравенства

12.10. Решите неравенство.

В

5) $25^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} \le 30$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Рассмотрим выражение:

$25^{\log_5^2 x} = \left(5^{\log_5 x}\right)^{\log_5 x \cdot 2} = x^{2\log_5 x} = \left(x^{\log_5 x}\right)^2$.

Обозначим $x^{\log_5 x} = t$ и решаем квадратное неравенство $t^2 + t - 30 \le 0$, откуда $-6 \le t \le 5$. Неравенство $x^{\log_5 x} \le 5$ логарифмируем по основанию 5 и получим $(\log_5 x)^2 \le 1$, т. е. $-1 \le \log_5 x \le 1$, откуда $\frac{1}{5} \le x \le 5$.

Решение систем уравнений

12.12. Решите систему уравнений.

А

15) $\begin{cases} \cos x \cos y = 3 \sin x \sin y, \\ x + 2y = \frac{3}{2}\pi. \end{cases}$

Решение. Преобразуем тригонометрическое уравнение $\cos x \cos y - \sin x \sin y = 2 \sin x \sin y$, $\cos(x + y) = \cos(x - y) - \cos(x + y)$, $2\cos(x + y) = \cos(x - y)$. Из второго уравнения выражаем $x = \frac{3\pi}{2} - 2y$ и подставляем в первое уравнение; получим уравнение $-2 \sin y = -\sin 3y$, $(\sin 3y - \sin y) - \sin y = 0$, $\sin y\,(2\cos 2y - 1) = 0$, тогда $y = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, или $y = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. $x = \frac{3\pi}{2} - 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = \frac{3\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} - 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Б

1) $\begin{cases} xy = 40, \\ x^{\lg y} = 4. \end{cases}$

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$.

Логарифмируем оба уравнения системы по основанию 10, вводим обозначения: $\lg x = p$, $\lg y = q$, получим систему:

$$\begin{cases} p + q = 1 + \lg 4, \\ pq = \lg 4; \end{cases} \begin{cases} p = 1 + \lg 4 - q, \\ q^2 - q(1 + \lg 4) + \lg 4 = 0; \end{cases} \begin{cases} p = 1 + \lg 4 - q, \\ \left[\begin{array}{l} q = 1, \\ q = \lg 4; \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} p = \lg 4, \\ q = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} p = 1, \\ q = \lg 4; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lg x = \lg 4, \\ \lg y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \lg x = 1, \\ \lg y = \lg 4; \end{cases} \end{array}\right.$$ откуда $x_1 = 4$, $y_1 = 10$; $x_2 = 10$, $y_2 = 4$.

8) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{xy}} + 1, \\ \sqrt{x^3 y} + \sqrt{xy^3} = 78. \end{cases}$

Решение. ОДЗ: $xy > 0$. Преобразуем уравнения, получим:

$\begin{cases} |x| + |y| = 7 + \sqrt{xy}, \\ \sqrt{xy}(|x| + |y|) = 78; \end{cases}$ $7\sqrt{xy} + \left(\sqrt{xy}\right)^2 = 78$, откуда $\sqrt{xy} = 6$.

Решаем систему: $\begin{cases} |x| + |y| = 13, \\ \sqrt{xy} = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} |x| + |y| = 13, \\ xy = 36; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{36}{y}, \\ \dfrac{36}{|y|} + |y| = 13; \end{cases}$

$\begin{cases} x = \dfrac{36}{y}, \\ \left[\begin{array}{l} |y| = 9, \\ |y| = 4; \end{array}\right. \end{cases}$ откуда $x = \pm 4$, $y = \pm 9$ или, наоборот, $x = \pm 9$, $y = \pm 4$.

В

2) $\begin{cases} y^2 - x - 5 = 0, \\ \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$

Решение. ОДЗ: $y \neq \pm 1$, $x \neq 0$. В первом уравнении выразим $y^2 - 1 = x + 4$ и подставим во второе. Получим: $\dfrac{2}{x+4} = \dfrac{1}{x}$, откуда $x = 4$, $y = \pm 3$.

III КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольные работы являются примерными. Для обучающихся по программе гуманитарного профиля контрольные работы предлагаются в двух вариантах. По некоторым большим темам предлагаются две контрольные работы.

ГЛАВА 1
РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ

➢ Гуманитарный профиль (6 — 10 *занятий на изучение темы*)

■ *I вариант*

1. Найдите значение выражения $1:\left(\frac{a}{c}-b^2\right)$ при $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{5}{6}$, $c=0,6$.
2. Представьте обыкновенную дробь $\frac{3}{7}$ в виде десятичной периодической дроби.
3. Число 0,000314 представьте в стандартном виде.
4. Найдите произведение чисел $a = 5,4(25)$ и $b = 0,2468101...$ с точностью до десятых.
5. Изобразите на числовой оси значения величины p, если известно $|p - 12,4| < 0,8$. Укажите погрешность вычисления величины p, найдите относительную погрешность в процентах с точностью до десятых.

Ответы: 1. 2,4. 2. 0,(428571). 3. $3,14\cdot10^{-4}$. 4. 1,4. 5. $\frac{2}{31}$; 6,5 %.

■ *II вариант*

1. Найдите значение выражения $1:\left(a^2-\frac{b}{c}\right)$ при $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{4}{5}$, $c=1{,}6$.
2. Представьте обыкновенную дробь $\frac{4}{7}$ в виде десятичной периодической дроби.
3. Число 0,0000271 представьте в стандартном виде.
4. Найдите произведение чисел $a = 3{,}2(14)$ и $b = 0{,}02345202...$с точностью до сотых.
5. Изобразите на числовой оси значения величины c, если известно $|c - 3800| < 10$. Укажите погрешность вычисления величины c, найдите относительную погрешность в процентах с точностью до сотых.

Ответы: 1. $\frac{4}{3}$; 2. 0,(571428); 3. $2{,}71\cdot10^{-5}$; 4. 0,07; 5. $\frac{1}{38}$; 0,26 %

➢ Технический профиль НПО (12 — 16 *занятий на изучение темы*)

1. Вычислите $4\frac{24}{25}:\dfrac{\frac{17}{40}+\frac{13}{25}+0{,}0175+0{,}00625}{0{,}36\cdot3\frac{1}{8}-0{,}156:\frac{24}{125}}$.
2. Запишите числа в стандартном виде:
   а) 0,00018; б) 375000000.
3. Найдите произведение чисел $a = 2{,}0(352)$ и $b = 0{,}012756...$ с точностью до 10^{-2}.
4. Изобразите на числовой оси значение величины q, если известно $|q - 18{,}12| < 0{,}02$. Найдите относительную погрешность вычисления величины q в процентах с точностью до десятых.
5. Даны числа $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 2 - 3i$.
   а) Вычислите модули, сумму, разность, произведение чисел z_1 и z_2.
   б) Изобразите в координатной плоскости числа: $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$.

Ответы: 1.1,6. 3. 0,03. 4. 0,12 %. 5. $z_1\cdot z_2 = -1 + 8i$.

➢ Технический профиль СПО (20 *занятий на изучение темы*)

1. Электрический чайник с водой с подключается к источнику ЭДС на время $t = 400$ с. Сопротивление R нагревательного

элемента равно 20 Ом. Величина ЭДС $\varepsilon = 100$ В, внутреннее сопротивление источника $r = 10$ Ом. Теплоемкость чайника $c = 1500$ Дж/°С, нагревание начинается с температуры $T_0 = 20$ °С. Определите температуру T (с точностью до целых), до которой нагреется вода в чайнике, если величины связаны формулой $\frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2}Rt = c(T - T_0)$.

2. Запишите числа в стандартном виде:
   а) 0,00018; б) 375000000.
3. Найдите произведение чисел $a = 2{,}0(352)$ и $b = 0{,}012756...$ с точностью до 10^{-2}.
4. Изобразите на числовой оси значение величины q, если известно $|q - 18{,}12| < 0{,}02$. Найдите относительную погрешность в процентах с точностью до десятых.
5. $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 2 - 3i$.
   а) Вычислите произведение и частное комплексных чисел z_1 и z_2.
   б) Вычислите модуль разности.
   в) Вычислите значение выражения $z_1^4 - 2z_2^2$.
6. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию $|z + 3 - i| = 4$.

Ответы: 1. 79 °С. 3. 0,03. 5. в) 3.

ГЛАВА 2

КОРНИ, СТЕПЕНИ, ЛОГАРИФМЫ

➢ Гуманитарный профиль (12 — 16 *занятий на изучение темы*)

■ *I вариант*

1. Вычислите:

   а) $\sqrt{\sqrt[3]{2^6 \cdot 6^{12}}}$;

   б) $\dfrac{\sqrt[4]{48} \cdot \sqrt{245}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{3}}$;

   в) $25^{1,5} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-0,5}$;

г) $\dfrac{5^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{10^{\frac{1}{2}}}$;

д) $\log_{0,5} 18 + \log_{0,5} \dfrac{1}{8} - 2\log_{0,5} 3$;

е) $25^{2-\log_{25} 5}$;

ж) $\dfrac{28^{\frac{1}{2}} + 63^{\frac{1}{2}}}{5} - 7^{\frac{1}{2}}$.

2. Найдите наименьшее значение функции $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ на отрезке $[-2; 2]$.

3. Решите уравнение $0{,}1^{2x^2-1} = \left(\dfrac{1}{100}\right)^{x^2+x}$.

4. Решите неравенство $\lg(x-2) + \lg 2 < 2$.

Ответы: 1. а) 72; б) 14; в) 127; г) $5^{\frac{1}{4}}$; д) 2; е) 125; ж) 0. 2. $\dfrac{1}{16}$. 3. 0,5. 4. (2; 52).

II вариант

1. Вычислите:

а) $\sqrt{\sqrt[4]{3^{16} \cdot 6^8}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt{250}}$;

в) $27^{\frac{2}{3}} - \left(\dfrac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$;

г) $\dfrac{3 \cdot 7^{\frac{2}{3}}}{21^{\frac{2}{3}}}$;

д) $\log_5 20 + \log_5 \dfrac{1}{4} - 2\log_5 5$;

е) $16^{1+\log_4 2}$;

ж) $\dfrac{80^{\frac{1}{2}} + 45^{\frac{1}{2}}}{7} - 5^{\frac{1}{2}}$.

2. Найдите наибольшее значение функции $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ на промежутке [2; 6].

3. Решите уравнение $100^{x^2+x}=0{,}1^{4-2x^2}$.

4. Решите неравенство $\lg 5+\lg(x-4)<1$.

Ответы: 1. а) 54; б) 1,2; в) 1; г) $3^{\frac{1}{3}}$; д) –1; е) 64; ж) 0. 2. $\frac{1}{9}$. 3. –2. 4. (4; 6).

➢ Технический профиль НПО и СПО (32 — 38 *занятий на изучение темы*)

■ *Контрольная работа № 1*

Корни, степени, логарифмы. Степенная, показательная, логарифмическая функции

1. Вычислите:

а) $\dfrac{2^{-2}+5^0}{(0{,}5)^{-2}-5\cdot(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}+4{,}75$;

б) $4:\left(0{,}6\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)-10\sqrt[4]{1{,}5}:\left(0{,}25\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}}\right)$;

в) $81^{\frac{1}{\log_2 3}}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$;

г) $\log_{\sqrt{3}}27+\log_{0{,}5}4-4\log_3^2\sqrt{3}$.

2. Укажите наименьшее значение функции на отрезке [0,5; 2]:

а) $y=\frac{1}{2x}$;

б) $y=\left(\frac{9}{4}\right)^x$;

в) $y=\log_{\frac{1}{4}}x$.

3. Найдите область определения логарифмической функции $y=\lg(x^2-x-12)+\lg(x-4)$.

Ответы: 1. а) 5; б) 0; в) 15; г) 3; 2. а) $\frac{1}{4}$; б) 1,5; в) –0,5; 3. (4; +∞).

Контрольная работа № 2

Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств

1. Решите показательные уравнения и неравенства:

а) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x}=1\frac{7}{9}$;

б) $9^{3+x}+9^{x+1}=738\cdot\frac{1}{81}$;

в) $3^{x+1}+\frac{18}{3^x}-29=0$;

г) $2\cdot\sqrt{\frac{1}{32}}\geq\left(\frac{1}{512}\right)^{2-\frac{1}{3}x}$.

2. Решите логарифмические уравнения и неравенства:

а) $\log_4(x+3)+\log_4(x-1)=2+\log_4 0{,}3125$;

б) $\log_3^2(4x+1)-\log_3(4x+1)^3+2=0$;

в) $\log_{\frac{1}{4}}(4x-5)<\log_{\frac{1}{4}}(2-x)$.

3. Решите графически неравенство $\log_{\frac{1}{4}}x\geq 2x-2$.

4. Найдите область определения логарифмической функции $y=\lg(4^x-2^x-12)+\lg(4-x)$.

Ответы: 1. а) 4; б) –2; в) 2; $\log_3\frac{2}{3}$; г) $(-\infty; 5{,}5]$; 2. а) 2; б) 0,5; 2; в) (1,4; 2). 3. (0; 1]. 4. (2; 4).

ГЛАВА 3

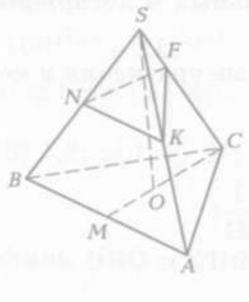
ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

➢ Гуманитарный профиль (8 — 10 *занятий на изучение темы*)

I вариант

Решите задачу. На рисунке изображена правильная треугольная пирамида $SABC$. Точки K, N, M — середины ребер SA, SB,

AB соответственно. Точка F делит ребро SC в отношении 1 : 3, считая от вершины S; SO — перпендикуляр к плоскости ABC.



1. Укажите:
   а) прямую, параллельную плоскости ABC, ответ обоснуйте;
   б) прямые, скрещивающиеся с прямой AB;
   в) угол наклона ребра SC к плоскости ABC;
   г) линейный угол двугранного угла $SABC$.
2. Постройте:
   а) точку пересечения прямой FN с плоскостью ABC;
   б) прямую в плоскости SBC, проходящую через точку N, параллельно плоскости ABC;
   в) угол наклона ребра SB к плоскости ABC;
   г) из точки O и S перпендикуляры к прямой BC;
   д) из точки F прямую, параллельную прямой SO.
   Обоснуйте построения.

Ответы: **1.** а) NK; б) SC; FK; FN; SO; в) угол SCO; г) угол SMC. **2.** а) продлить до пересечения FN и CB; б) средняя линия треугольника SBC; в) угол SBO; г) имеют общую точку на ребре BC по теореме о трех перпендикулярах; д) пересекается с CO.

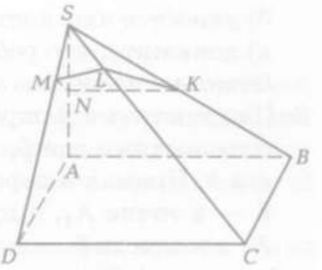
■ II вариант

Решите задачу. На рисунке изображена пирамида $SABCD$, у которой основание $ABCD$ — прямоугольник, а ребро SA расположено перпендикулярно основанию. Четырехугольник $KLMN$ — сечение пирамиды плоскостью. Точки N и K являются серединами ребер SA и SB соответственно, а точка M делит ребро SD в отношении 1 : 4, считая от вершины.

1. Укажите:
   а) прямые, параллельные плоскости основания пирамиды, ответ обоснуйте;
   б) прямые, скрещивающиеся с прямой DC;

в) угол наклона ребра SD к плоскости ABC;

г) линейный угол двугранного угла $SDCB$.



2. Постройте:

а) точку пересечения прямой LK с плоскостью ABC;

б) из точки L перпендикуляр к плоскости основания;

в) угол наклона ребра SC к плоскости основания пирамиды;

г) точку пересечения прямой с плоскостью ABC, проходящей через точку M параллельно прямой SA.

Обоснуйте построения.

3. Докажите, что прямая ML параллельна плоскости ABC.

Ответы: **1.** а) NK, ML; б) SA, SB, MN, LK; в) угол SDA; г) угол SDA. **2.** а) точка пересечения прямых LK и BC; б) параллельно SA и пересекающийся с AC; в) угол SCA; г) на ребре DA.

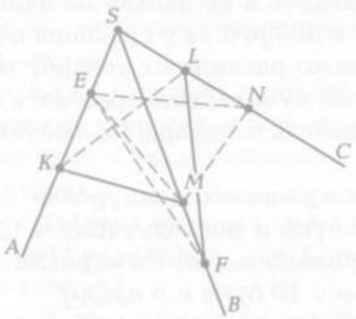
➢ Технический профиль НПО и СПО (24 *занятия на изучение темы*)

1. На рисунке прямые SA, SB, SC не лежат в одной плоскости. Среди отрезков EN, EF, EM, KL, KM, FL, MN укажите отрезки:

а) лежащие на пересекающихся прямых;

б) пересекающиеся, но не выходящие из одной точки;

в) лежащие на скрещивающихся прямых.



Обоснуйте ответы.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб:

а) укажите плоскости, параллельные ребру DC;

б) укажите плоскости, перпендикулярные ребру DC;

в) докажите, что ребро DC перпендикулярно AD_1.

Ответы к заданиям а) и б) обоснуйте.

3. Плоскости α и β параллельны. Через точку O, взятую между плоскостями α и β, проведены две пересекающиеся прямые a и b. Прямая a пересекает плоскость α в точке A, плоскость β — в точке A_1, а прямая b пересекает плоскость α в точке B, плоскость β — в точке B_1; $OA : OA_1 = 2 : 3$, $AB = 10$. Вычислите A_1B_1.
4. Равносторонний треугольник ABC и квадрат $BCDE$ имеют общую сторону BC, равную 4 см. Плоскость треугольника расположена перпендикулярно плоскости квадрата. Вычислите расстояние от точки A до стороны DE.

Ответы: 3. 15. 4. $2\sqrt{7}$.

ГЛАВА 4
КОМБИНАТОРИКА

➢ Гуманитарный профиль (6 — 8 *занятий на изучение темы*)

■ *I вариант*

1. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5?
2. Были куплены билеты в театр для шести ребят. Сколькими способами эти ребята могут занять свои места в театре?
3. У покупателя имелись в кошельке по одной купюре 10 руб., 50 руб., 100 руб. и 500 руб., а у продавца не было денег, чтобы дать сдачу. Сколько различных товаров мог купить покупатель, чтобы ему не нужно было требовать сдачу (предполагается, что в магазине есть товары на любую сумму, доступную покупателю)?
4. Шифр пакета, содержащего конкурсные задания, состоит из трех различных букв и последующих 4 цифр (цифры могут повторяться). Сколько может быть различных пакетов, если в них используется 10 букв и 5 цифр?
5. Сколькими способами можно поставить в две одинаковые вазы 8 различных цветков, если в каждой вазе их должно быть нечетное число?

Ответы: 1. 125. 2. 720. 3. 15. 4. 450 000. 5. 448.

■ *II вариант*

1. Пять ребят решили поехать за город, но забыли договориться, в какой вагон всем следует садиться, поэтому каждый мог сесть в любой вагон. Сколько существует различных вариантов распределения ребят по вагонам, если в поезде было 10 вагонов?
2. Учеников попросили нарисовать прямоугольник, разбить его на шесть прямоугольников параллельными отрезками и раскрасить шестью разными красками. Сколько может получиться различных раскрасок?
3. К началу учебного года в магазине покупателям предлагались комплекты тетрадей, альбомы, ручки, линейки, краски и наборы цветных карандашей. Сколько можно было сделать различных покупок, если брать не более одного предмета каждого наименования?
4. Сколько можно изготовить кодовых замков, у которых код состоит из двух различных цифр и трех любых букв, если можно использовать 10 цифр и 15 букв. Порядок набора цифр и букв не имеет значения.
5. Сколькими способами можно разложить 10 различных конфет в два одинаковых пакета, если в них должно быть четное число конфет?

Ответы: 1. 10^5. 2. 720. 3. 15. 4. 303 750. 5. 255.

➢ Технический профиль НПО и СПО (20 — 24 *занятия на изучение темы*)

1. Сколько существует четырехзначных чисел, у которых вторая и третья цифры четные?
2. Монета бросается 6 раз. Сколько существует вариантов, в которых 2 раза выпадет «решка», а 4 раза — «орел»?
3. Сколько можно получить различных слов, переставляя буквы в слове «абракадабра»?
4. Шесть различных цветков разложили в три различные вазы. Сколько существует вариантов, при которых в первой вазе будет всего один цветок?
5. В классе 30 человек, из которых 12 девочек. Сколько можно составить спортивных команд, в которые должны входить 2 девочки и 2 мальчика?

Ответы: 1. 2 250. 2. 15. 3. 83 160. 4. 192. 5. 10 098.

ГЛАВА 5

КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

➢ Гуманитарный профиль (6—8 *занятий на изучение темы*)

■ *I вариант*

1. В треугольнике ABC отрезок BO является медианой.
   а) Постройте вектор $\overline{BK}$, равный сумме векторов $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$.
   б) Докажите, что четырехугольник $BAKC$ является параллелограммом.
   в) Выразите вектор $\overline{BO}$ через векторы $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$.
   г) Укажите вектор, выходящий из точки B, который является разностью векторов $\overline{BO}$ и $\overline{OA}$.
2. Даны три точки с координатами: $F(8;\ 1;\ 0)$, $E(0;\ 0;\ 4)$, $K(0;\ 5;\ 1)$.
   а) Постройте их в декартовой системе координат.
   б) Укажите, в каких координатных плоскостях или на каких координатных осях они находятся.
   в) Докажите, что треугольник FKE равнобедренный.
   г) Вычислите площадь треугольника FKE с точностью до целых.

Ответы: **1.** в) $0{,}5(\overline{BA}+\overline{BC})$; г) $\overline{BC}$. **2.** г) 11.

■ *II вариант*

1. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O.
   а) Постройте вектор $\overline{OF}$, равный сумме векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OD}$.
   б) Докажите, что четырехугольник $OAFD$ — ромб.
   в) Выразите вектор $\overline{BC}$ через векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AF}$.
   г) Укажите вектор, выходящий из точки B, который является разностью векторов $\overline{DF}$ и $\overline{DO}$.
2. Даны три точки с координатами: $P(4;\ 0;\ 0)$, $K(0;\ 2;\ 0)$, $T(2;\ 0;\ 4)$.
   а) Постройте их в прямоугольной системе координат.
   б) Укажите, на каких координатных осях или в каких координатных плоскостях они находятся.
   в) Докажите, что треугольник PKT — равнобедренный.
   г) Вычислите площадь треугольника PKT.

Ответы: **1.** в) $\overline{AF}+0{,}5\overline{AC}$; г) $\overline{BA}$. **2.** г) $\sqrt{84}$.

➢ **Технический профиль НПО и СПО (20 — 24 *занятия на изучение темы*)**

■ *Контрольная работа № 1*

1. $DABC$ — тетраэдр, точка K — середина AC, точка M — середина KD, $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Разложите вектор $\overrightarrow{BM}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
2. Даны векторы $\vec{a}(1;-2;0)$, $\vec{b}(3;-6;0)$ и $\vec{c}(0;-3;4)$. Найдите координаты вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$.
3. Дан треугольник MNC, вершины которого имеют координаты: $M(2; -3; 3)$, $N(-1; 1; -2)$ и $C(5; 3; 1)$.

   Докажите, что треугольник равнобедренный и вычислите его площадь.

Ответы: **1.** $-\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}$. **2.** $\vec{p}\{1; -5; 4\}$. **3.** $\frac{5\sqrt{73}}{2}$.

■ *Контрольная работа № 2*

1. Найдите скалярное произведение $\vec{m}\,(\vec{m} + \vec{n})$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m}; \vec{n}) = 120°$.
2. Даны точки $C(3; -2; 1)$, $D(-1; 2; 1)$, $M(2; 1; 3)$, $N(-1; 4; -2)$.

   а) Определите, будут ли прямые CM и DN перпендикулярны.

   б) Найдите длину вектора $\vec{p} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{MN}$.

   в) Проверьте, является ли уравнение $21x + 11y - 6z - 35 = 0$ уравнением плоскости CMN.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точка M — середина стороны DD_1. Найдите угол между прямыми AM и DC_1.

   Ответы: **1.** 1. **2.** а) да; б) $2\sqrt{33}$; в) да. **3.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$.

ГЛАВА 6

ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

➢ **Гуманитарный профиль (12 — 14 *занятий на изучение темы*)**

■ *I вариант*

1. Дан угол поворота $\alpha = \frac{4\pi}{5}$.

а) Выразите величину угла поворота $\alpha = \frac{4\pi}{5}$ в градусной мере.

б) Постройте на единичной окружности точку, соответствующую углу поворота $\alpha = \frac{4\pi}{5}$.

в) Укажите знаки чисел: $\sin\frac{4\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}$.

г) Укажите значение $\sin\frac{4\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$, если известно, что $\sin 36^\circ \approx$ $\approx 0{,}5878$; $\cos 36^\circ \approx 0{,}8090$.

2. На единичной окружности постройте точки P_x и укажите значения углов поворота в этих точках, если:

а) $\sin x = 1$;

б) $\cos x = 0$;

в) $\sin x = 0{,}5$;

г) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

д) $\cos x = -0{,}5$.

3. Для каждого случая из п. 2 укажите значения остальных тригонометрических функций в этих точках.

Ответы: 1. г) 0,5878 и –0,8090.

■ II вариант

1. Дан угол поворота $\alpha = \frac{7\pi}{9}$.

а) Выразите величину угла поворота $\alpha = \frac{7\pi}{9}$ в градусной мере.

б) Постройте на единичной окружности точку, соответствующую углу поворота $\alpha = \frac{7\pi}{9}$.

в) Укажите знаки чисел $\sin\frac{7\pi}{9}$, $\cos\frac{7\pi}{9}$, $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{9}$.

г) Укажите значение $\sin\frac{7\pi}{9}$, $\cos\frac{7\pi}{9}$, если известно, что $\cos 40^\circ = 0{,}7660$; $\sin 40^\circ = 0{,}6428$.

2. На единичной окружности постройте точки P_x и укажите значения углов поворота в этих точках, если:

а) $\sin x = 0$;

б) $\cos x = -1$;

в) $\cos x = -0{,}5$;

г) $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

д) $\sin x = -0{,}5$.

3. Для каждого случая из п. 2 укажите значения остальных тригонометрических функций.

Ответы: **1.** г) 0,3420.

➢ Технический профиль НПО (32 *урока на изучение темы*)

■ *Контрольная работа № 1*

1. Вычислите $\cos(\beta - \alpha)$, если $\sin\alpha = -\dfrac{7}{25}$; $\pi \le \alpha\ \dfrac{3}{2}\pi$ и $\cos\beta = -\dfrac{3}{5}$; $\dfrac{\pi}{2} \le \beta \le \pi$.

2. Упростите $\dfrac{\sin\alpha + \cos\dfrac{\alpha}{2}}{1 - \cos\alpha + \sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

3. Расположите числа в порядке убывания:

$\cos 40°$; $\cos\dfrac{14\pi}{9}$; $\cos 1000°$, $\cos 1{,}6$.

4. Постройте график функции $y = 2\sin x$ на отрезке $\left[0; \dfrac{7\pi}{4}\right]$ и

укажите для значений x, принадлежащих этому отрезку:

а) множество значений функции;

б) промежутки возрастания и убывания;

в) точки, в которых функция принимает наименьшее значение;

г) нули функции;

д) участки постоянного знака;

е) количество корней уравнения $2\sin x = a$ в зависимости от a.

Ответы: **1.** 0,352. **2.** $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. **3.** $\cos 40° > \cos\dfrac{14\pi}{9} = \cos 1\,000° > \cos 1{,}6$.

4. е) $|a| > 2$ — корней нет; $|a| = 2$, $a \in \left(-\sqrt{2}; 0\right)$ — один корень; $a \in \left(-2; -\sqrt{2}\right) \cup [0; 2)$ — два корня.

■ Контрольная работа № 2

Решите уравнение.

1. $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$;
2. $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=5\cos\frac{x}{2}+1$;
3. $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x = 1$;
4. $\sin 6x - \sin 2x = 0$;
5. $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$;
6. $3\cos^2 x + 4\sin x\cos x + 5\sin^2 x = 2$;
7. $\sin x + |\sin x| = \cos x$.

Ответы: **1.** $\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in Z$; **2.** $2(\pm(\pi-\arccos\frac{1}{3})+2\pi n),\ n\in Z$;

3. $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z; \operatorname{arctg}2+\pi k,\ k\in Z$; **4.** $0{,}5\pi n,\ n\in Z$; $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4},\ k\in Z$;

5. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; **6.** $\frac{-\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z; -\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k,\ k\in Z$;

7. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi n,\ n\in Z; -\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$.

➢ Технический профиль СПО (40 — 44 *урока на изучение темы*)

■ Контрольная работа № 1

1. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sqrt{2}\sin\alpha}$.
2. Вычислите $\frac{1}{\cos 20^\circ}-4\sin 50^\circ$.
3. Не вычисляя, определите знак выражения:

   а) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\frac{23\pi}{12}$;

   б) $\sin 1 - \sin 9$.
4. Укажите наименьший положительный период функции $y = 2(1-\cos 3x\sin 3x)$. Докажите.

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=1+\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$ и укажите, при каких значениях x оно достигается.
6. Постройте график функции $y = |\cos x| + \cos x$.

Ответы: 1. tg α. 2. –2. 3. а) «–»; б) «+». 4. $\frac{\pi}{3}$. 5. $y_{\min} = 1$ при $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $y_{\max} = 1{,}5$ при $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n \in\mathbf{Z}$.

■ *Контрольная работа № 2*

Решите уравнение.

1. $1 - \cos 4x = \sin 2x$;
2. $2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 3 \sin^2 2x = 4$;
3. $4 \sin^2 x + 1 = 3 \sin 2x - \cos 2x$;
4. $\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=1$;
5. $\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}+2\,\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}-3=0$.

Ответы: 1. $\frac{\pi k}{2}, k \in\mathbf{Z}$; $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbf{Z}$. 2. πn, $n \in \mathbf{Z}$.

3. $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in \mathrm{Z}$, $\operatorname{arctg} 0{,}5 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. $\frac{-\pi}{12}\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in \mathrm{Z}$. 5. πn, $n \in \mathbf{Z}$, $\operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

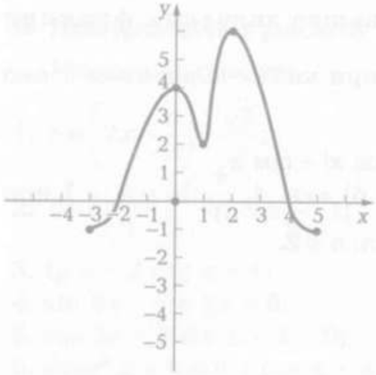
ГЛАВА 7

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

➢ Гуманитарный профиль (10 — 14 *занятий на изучение темы*)

■ *I вариант*

1. По графику функции $y = f(x)$ укажите:
   а) область определения функции;
   б) нули функции;
   в) промежутки постоянного знака функции;



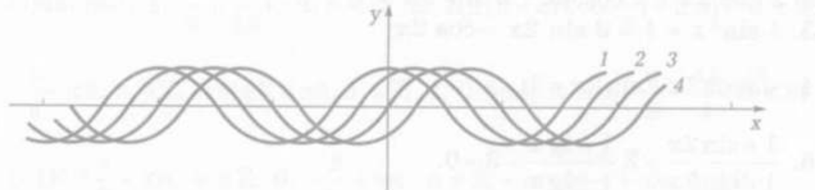
г) точки максимума и минимума функции;

д) промежутки монотонности;

е) наибольшее и наименьшее значения функции;

ж) область значений функции.

2. Даны графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, обозначенные цифрами *1*, *2*, *3*, *4*.



а) Укажите для каждой функции номер ее графика.

б) Определите, какие из них являются четными, какие нечетными.

в) Определите, график какой из них проходит через точку $\left(\frac{7\pi}{4}; 0\right)$.

Ответы: 2. а) $y = \cos x - 1$, $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$, $y = \sin x - 3$, $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 4$; в) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

II вариант

1. По графику функции $y = f(x)$ укажите:

а) область определения функции;

б) нули функции;

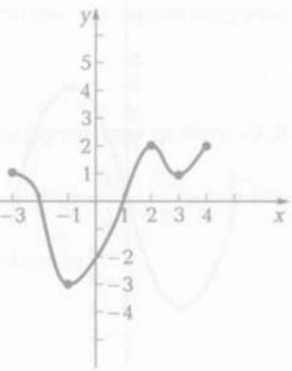
в) промежутки постоянного знака функции;

г) точки максимума и минимума функции;

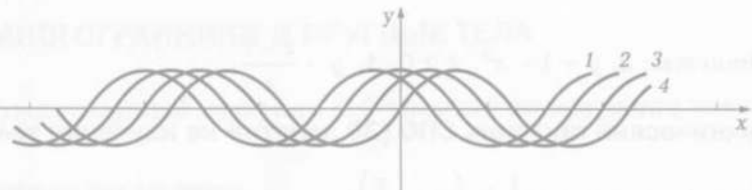
д) промежутки монотонности;

е) наибольшее и наименьшее значения функции;

ж) область значений функции.



2. Даны графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, обозначенные цифрами *1*, *2*, *3*, *4*.



а) Укажите для каждой функции номер ее графика.

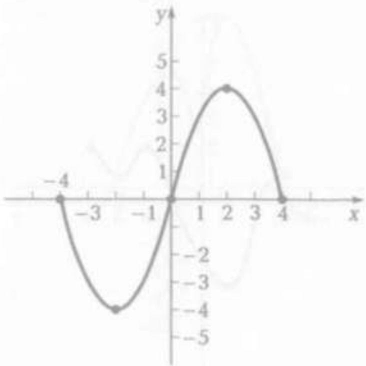
б) Определите, какие из них являются четными, какие нечетными.

в) Определите, график какой из них проходит через точку $\left(\frac{7\pi}{4}; 1\right)$.

Ответы: 2. а) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$, $y = \cos x - 2$, $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3$, $y = \sin x - 4$; в) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

➢ Технический профиль НПО (20 — 24 *занятия на изучение темы*)

1. Постройте график функции $y = x^2 - 4x + 3$ и укажите ее свойства.
2. Дан график функции $y = f(x)$. Постройте графики функций: $y = f(x - 1)$;



$y = f(x) + 1$;

$y = f(2x)$.

3. Для функции $y = \sqrt{1-x}$ найдите обратную; постройте график данной функции и обратной к ней; для каждой из них укажите область определения и множество значений.

4. Дана функция $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Составьте формулу функции $y = f(f(x))$ и найдите ее значение при $x = 5$.

Ответы: **3.** $y = 1 - x^2$, $x \geq 0$. **4.** $y = \dfrac{x-1}{x}$.

➢ Технический профиль СПО (30 *занятий на изучение темы*)

1. Дана функция $y = \dfrac{1}{2}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$:

а) укажите наименьший положительный период;

б) найдите наибольшее и наименьшее значения функции и точки, в которых они достигаются на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{7\pi}{6}\right]$;

в) найдите нули функции на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{7\pi}{6}\right]$;

г) постройте график функции на отрезке $\left[0; \dfrac{7\pi}{6}\right]$;

д) определите, сколько нулей имеет функция на отрезке $\left[\dfrac{91\pi}{6}; \dfrac{127\pi}{6}\right]$;

е) определите, будет ли функция монотонно убывающей на отрезке $\left[\dfrac{29\pi}{2}; \dfrac{179\pi}{12}\right]$.

2. $f(x) = -x^2 + 4x + 5$, $g(x) = \log_2(x)$.

а) Составьте формулу функции $h(x) = g(f(x))$ и вычислите $h(3)$.

б) Укажите область определения и множество значений функции $h(x)$.

3. Для функции $y = \sin x$ составьте обратную на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответы: 1. а) π; б) наименьшее значение функции равно $-0{,}5$ при $x = \frac{11\pi}{12}$, наибольшее — $\frac{\sqrt{3}}{4}$ при $x = \frac{\pi}{2}$; в) $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{6}$; д) 13; е) да. 2. а) $h(3) = 3$; б) $(-\infty; \log_2 9]$. 3. $y = \pi - \arcsin x$.

ГЛАВА 8

МНОГОГРАННИКИ И КРУГЛЫЕ ТЕЛА

➢ Гуманитарный профиль (10 *занятий на изучение темы*)

■ *Зачет по теории*

Вопросы для проведения зачета

1. Призма. Описание, элементы призмы, диагонали призмы, виды призм.
2. Параллелепипед. Определение, элементы, диагональные сечения, виды параллелепипедов.
3. Прямоугольный параллелепипед. Определение, свойства ребер, граней, диагоналей.
4. Куб. Определение, элементы. Свойства ребер, граней, диагоналей. Диагональные сечения куба, симметрия.
5. Прямоугольный параллелепипед, правильная четырехугольная призма, куб — их общие свойства и различие. Вычисление диагонали, построение угла наклона диагонали к основанию.
6. Пирамида. Описание, элементы, виды пирамид.
7. Правильная пирамида. Определение, свойства, построение угла наклона бокового ребра к основанию, построение угла наклона боковой грани к основанию.
8. Правильные многогранники. Виды, свойства, симметрия.
9. Цилиндр. Определение, элементы, осевое сечение, симметрия.
10. Конус. Определение, элементы, осевое сечение, симметрия.
11. Шар, сфера. Определение. Сечение плоскостью, касательная плоскость.

➢ Технический профиль НПО и СПО (30 *занятий на изучение темы*)

1. Дана правильная четырехугольная призма.
   а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через диагональ нижнего основания и середину стороны верхнего основания. Установите вид получившегося сечения.
   б) Вычислите периметр сечения, если боковое ребро призмы равно 8 см, а сторона основания равна 12 см.
2. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 6 и 8 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей и равна 5 см. Докажите, что все боковые ребра пирамиды равны между собой и одинаково наклонены к плоскости основания пирамиды. Вычислите углы наклона боковых ребер к основанию и их длину.
3. Конус вписан в сферу радиуса $R = 2$. Угол при вершине осевого сечения конуса равен $120°$. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости основания конуса.

Ответы: **1.** а) трапеция; б) $20 + 18\sqrt{2}$. **2.** $45°$; $5\sqrt{2}$. **3.** 1.

ГЛАВА 9

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

➢ Гуманитарный профиль (12 — 16 *занятий на изучение темы*)

■ *I вариант*

1. Последовательность задана формулой $a_n = 7n - 15$.
   а) Вычислите первые пять членов этой последовательности.
   б) Определите, будет ли число 944 являться членом этой последовательности.
   в) Найдите самый близкий к числу 100 член этой последовательности.
2. Дана функция $y = x^2 - 4x + 8$.
   а) Вычислите производную этой функции в точке $x = 2$.
   б) Вычислите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику, в точке $x = 2{,}5$.
   в) Определите промежутки монотонности и экстремумы.
   г) Укажите множество значений.

3. Используя таблицу производных, найдите производные функций:

а) $y = 8x - 1$;

б) $y = 3x^5$;

в) $y = 2 \sin x - 1$;

г) $y = 4 - \ln x$;

д) $y = \sqrt[5]{x^3}$.

Ответы: **1.** а) –8, –1, 6, 13, 20; б) да; в) $a_{16} = 97$. **2.** а) 0; б) 1; в) $\min y = 4$ при $x = 2$; г) $[4; +\infty)$.

■ *II вариант*

1. Последовательность задана формулой $a_n = 3n - 8$.

а) Вычислите первые пять членов этой последовательности.

б) Определите, будет ли число 499 являться членом этой последовательности.

в) Найдите самый близкий к числу 50 член этой последовательности.

2. Дана функция $y = x^2 - 6x + 12$.

а) Вычислите производную этой функции в точке $x = 2$.

б) Вычислите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику, в точке $x = 2{,}5$.

в) Определите промежутки монотонности и экстремумы.

г) Укажите множество значений.

3. Используя таблицу производных, найдите производные функций:

а) $y = 12x - 1$;

б) $y = 2x^6$;

в) $y = 2 \cos x + 4$;

г) $y = 12 - e^x$;

д) $y = \sqrt[6]{x^5}$.

Ответы: **1.** а) –5, –2, 1, 4, 7; б) да; в) $a_{19} = 49$. **2.** а) –2; б) –1; в) $\min y = 3$ при $x = 3$; г) $[3; +\infty)$.

➢ Технический профиль НПО (24 *занятия на изучение темы*)

■ *Контрольная работа № 1*

1. Вычислите производные функций и найдите значение производной в точке $x = 1$:

а) $y = 4x - 18$; г) $y = 3\sqrt[3]{2x^4}$;

б) $y = x^5 + 3x^3 - 12x^2$; д) $y = \sin 2x$;

в) $y = 2x^{-\frac{5}{2}}$; е) $y = \sqrt{x}\,(x-1)$.

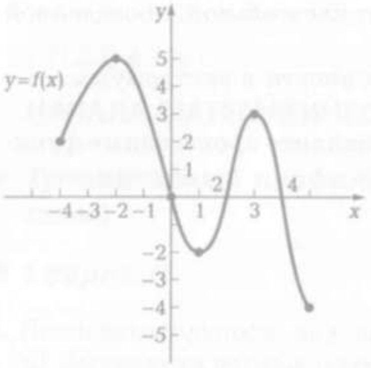
2. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \cos 2x$ в точке с абсциссой $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

3. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 4$, которая наклонена к оси Ox под углом 45°.

Ответы: **1.** а) 4; б) –10; в) –5; г) $4\sqrt[3]{2}$; д) 2 cos 2; е) 1. **2.** 2. **3.** $y = x - \dfrac{17}{4}$.

■ Контрольная работа № 2

1. Дан график производной функции $y = f(x)$ на отрезке [–4; 5]. Укажите промежутки монотонности и точки экстремумов функции.



2. Исследуйте функцию $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{2}x^2 + 1$ и постройте ее график.

3. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $s(t) = -\dfrac{1}{3}t^3 + 8t^2 - 8t - 5$. Найдите максимальную скорость движения этой точки.

Ответы: **1.** возрастающая на [–4; 0], [2; 4]; убывающая на [0; 2], [4; 5]; точки максимума $x = 0$, $x = 4$; точки минимума $x = 2$. **3.** 56.

➢ Технический профиль СПО (32 — *40 занятий на изучение темы*)

■ Контрольная работа № 1

1. Последовательность чисел задана формулой $a_n = \dfrac{-n^2 + 4}{2n^2 - n + 2}$.

а) Найдите, начиная с какого номера члены последовательности будут являться отрицательными числами.

б) Определите предел этой последовательности.

2. Вычислите производные функций и найдите значение производной при $x = 1$:

а) $y = 3x^4 - x^3 - 3\frac{x^2}{7} + 5x + 9$;

б) $y = 6\sqrt[3]{4x^2} - \frac{7}{x^3}$;

в) $y = \frac{4x+4}{x^2-2}$;

г) $y = e^{2-x}\ln(2x)$.

3. Определите, под какими углами парабола $y = x^2 - x - 6$ пересекает ось абсцисс.

Ответы: 1. а) с третьего; б) −0,5. 2. а) $13\frac{1}{7}$; б) $7 + 4\sqrt[3]{4}$; в) −20; г) $e\,(1 - \ln 2)$. 3. $\pm\text{arctg}\ 5$.

■ *Контрольная работа № 2*

1. Исследуйте функцию $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ и постройте график.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^2 e^{2x}$ на отрезке $[-2; 1]$.

3. Прямолинейное движение двух материальных точек задано уравнениями $s(t) = 2t^3 - 5t^2 - 3t$, $s(t) = 2t^3 - 3t^2 - 11t + 7$ (s, м; t, с). Найдите ускорение точек в тот момент времени, когда их скорости равны.

Ответы: 2. наименьшее равно 0, наибольшее равно e^2. 3. 14 м/с^2 и 18 м/с^2.

ГЛАВА 10

ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

➢ Гуманитарный профиль (6 — 8 *занятий на изучение темы*)

■ *I вариант*

1. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 48 см^3. Вычислите объем прямоугольного параллелепипеда, у которого

стороны основания в 1,5 раза больше, а высота в 2 раза меньше.

2. Цилиндр и конус имеют равные площади боковой поверхности. Найдите, чему равна образующая конуса, если высота цилиндра 12 см, радиус основания цилиндра 9 см, а конуса 6 см.
3. Вычислите объем и площадь поверхности шара, если площадь сечения, проходящего через центр шара, равна 64π см^2. Ответ укажите с точностью до целых.

   Ответы: 1. 54см^3. 2. 36 см. 3. 804 см^2, 2 144 см^3.

■ II вариант

1. Объем куба равен 63 см^3. Вычислите объем прямоугольного параллелепипеда, у которого стороны основания в 3 раза меньше, а высота в 4 раза больше ребра куба.
2. Цилиндр и конус имеют равные площади боковой поверхности. Найдите радиус основания цилиндра, если его высота 12 см, образующая конуса 26 см, а радиус основания конуса 10 см.
3. Объем шара равен 36π см^3. Вычислите поверхность шара и площадь сечения шара плоскостью, проходящей через центр.

   Ответы: 1. 28 см^3. 2. 10 см. 3. 36π см^2 и 9π см^2.

➢ Технический профиль НПО и СПО (16 — 20 занятий на изучение темы)

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - x + 3$, $y = 3x$.
2. Конус и полушар имеют общее основание, радиус которого равен R. Найдите боковую поверхность конуса, если его объем равен объему полушара.
3. Найдите полную поверхность правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 8, а двугранный угол при основании равен 60°.
4. Из медной болванки, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда размерами 80×20×5 (см), прокатывается лист толщиной 1 мм. Определите площадь этого листа.

   Ответы: 1. $\frac{4}{3}$. 2. $\pi R^2\sqrt{5}$. 3. $48\sqrt{3}$. 4. 8 м^2.

ГЛАВА 11

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

➢ Гуманитарный профиль НПО (12 *занятий на изучение темы*)

■ *I вариант*

1. Из 10 первых натуральных чисел случайно выбираются 2 числа. Вычислите вероятности следующих событий:
   а) одно из выбранных чисел — единица;
   б) оба числа четные.
2. Ученик знает ответы на 15 вопросов из 25. Он может сдавать зачет несколько раз. Предполагается, что его знания остаются на одном уровне и заданный один раз вопрос может быть задан повторно. Вычислите вероятность того, что ученик сдаст зачет со второй попытки.
3. В таблице указаны значения дискретной случайной величины x и соответствующие вероятности $p(x)$ этих величин.

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$p(x)$	0,05	0,10	0,10	0,20	0,15	0,15	0,10	0,05	0,05	*

   а) С какой вероятностью случайная величина принимает значение $x = 100$?
   б) Вычислите математическое ожидание случайной величины x.

   Ответы: **1.** а) 0,2; б) $\frac{2}{9}$. **2.** 0,24. **3.** а) 0,05; б) 50,5.

■ *II вариант*

1. Алфавит состоит из шести букв А, Б, В, Г, Д, Е и четырех цифр 0, 1, 2, 3, из которых составляются слова (произвольный набор букв и цифр). Вычислите вероятности следующих событий (буквы и цифры не повторяются):
   а) случайным образом составленное трехбуквенное слово содержит 2 согласные буквы и одну цифру;
   б) случайным образом составленное трехбуквенное слово оказалось четным числом.

2. Игральная кость бросается подряд 5 раз. Какова вероятность того, что двойка выпала ровно три раза.
3. В таблице указаны значения дискретной случайной величины x и соответствующие вероятности $p(x)$ этих величин.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(x)$	0,02	0,20	0,19	0,18	0,06	0,02	0,16	0,03	0,08	*

а) С какой вероятностью случайная величина принимает значение $x = 10$?

б) Вычислите математическое ожидание случайной величины x.

Ответы: 1. а) 0,2. 2. $\frac{125}{3\,888}$. 3. а) 0,06; б) 4,81.

➢ Технический профиль НПО (12 *занятий на изучение темы*)

1. Из 16 первых натуральных чисел случайно выбираются 2 числа. Вычислите вероятности следующих событий:
   а) ни одно из чисел не делится на 3;
   б) разность между бо́льшим и меньшим из выбранных чисел равна 5.
2. В группе из 25 студентов 5 отличников, 6 студентов имеют задолженности, остальные учатся на 4 и 3. Выбираем наугад двух учеников. Вычислите вероятности следующих событий:
   а) ученики из разных подгрупп;
   б) ни один из них не является отличником.
3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана функцией $f(x) = Ax^2$, $0 \le x \le 1$.
   а) Чему равен коэффициент A?
   б) Определите интегральную функцию распределения.
   в) Чему равно математическое ожидание случайной величины x?

Ответы: 1. а) $\frac{11}{120}$; б) $\frac{11}{120}$. 2. а) $\frac{1}{30}$; б) $\frac{19}{30}$. 3. а) 3; б) x^3, $0 \le x \le 1$; в) $\frac{3}{4}$.

ГЛАВА 12

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

➢ Гуманитарный профиль НПО (12 *занятий на изучение темы*)

■ *I вариант*

1. Проверьте, является ли число 0 корнем уравнения:

а) $8 - 3x - x^2 = (x - 4)(x + 2)$;

б) $\sqrt{x^2 - 1} = x - 1$;

в) $\log_2 (x + 4)(x + 0{,}125) = \log_2 32 - 6$;

г) $2^{x+3} = 6$;

д) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} y = x - 8, \\ y + x^2 + 6x = 0. \end{cases}$

3. Решите неравенство: $2\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{2 - x}{6} > \frac{3x - 2}{2}$.

4. Решите уравнения:

а) $(x^2 - 4)\sqrt{2x - 1} = 0$;

б) $4 \cdot 4^x - 33 \cdot 2^x + 8 = 0$.

Ответы: **1.** а) да; б) нет; в) да; г) нет; д) да. **2.** (–8; –16), (1; –7). **3.** (–2; +∞); **4.** а) 0,5; 2; б) –2; 3.

■ *II вариант*

1. Проверьте, является ли число 1 корнем уравнения:

а) $3x^2 + 2x - 17 = (3x - 1)(x + 5)$;

б) $\sqrt[3]{1 - 9x} - 2x$;

в) $\log_3 (29x - 2)(4x - 1) = 6 - \log_3 9$;

г) $4^{x-1} = 3^{x-1}$;

д) $\cos\frac{\pi x}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x = 2 - y, \\ 2y^2 - 3x + 1 = 0. \end{cases}$

3. Решите неравенство $\frac{4-3y}{2} < \frac{8y+1}{6} + 15\left(y - \frac{2}{5}\right)$.

4. Решите уравнения:

а) $\sqrt{9-x^2} = 0$;

б) $18 \cdot 9^x + 9 \cdot 3^x - 5 = 0$.

Ответы: **1.** а) да; б) нет; в) да; г) да; д) нет. **2.** (1; 1), (4,5; –2,5). **3.** $\left(\frac{47}{107}; +\infty\right)$. **4.** а) ±3; б) –1.

➢ Технический профиль НПО (20 *занятий на изучение темы*)

1. Решите уравнения:

а) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$;

б) $4^{\sqrt{2-3x}} + 16 - 10 \cdot 2^{\sqrt{2-3x}} = 0$;

в) $\sin 7x + \sin 5x = \sin 3x + \sin x$;

г) $(x^2 + 4x - 5)(\log_x (5x - 4) - 2) = 0$.

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + 2xy + 2 = 0, \\ 5x^2 - 4x^2y^2 - 4 = 0. \end{cases}$

3. Решите неравенства:

а) $\frac{1}{1+x} \le 1 - x$;

б) $\sqrt{24 - 5x} < x$.

Ответы: **1.** а) 2; $\pm\sqrt{3}$; б) $\frac{1}{3}; \frac{-7}{3}$; в) $\pi n, n \in Z; \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, k \in Z$; г) 1; 4; **2.** (2; –1), (–1; 0,5). **3.** а) $(-\infty; -1) \cup \{0\}$; б) (3; 4,8].

➢ Технический профиль СПО (32 *занятия на изучение темы*)

1. Решите уравнения:

а) $5 + 2 \cos 2x = -8 \cos x$;

б) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-3} = 0$;

в) $\log_x 9x^2 \cdot \log_3{}^2 x = 4$;

г) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$ имеет ровно три различных корня.

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 25, \\ 2x^2 - 2xy - y^2 = 11. \end{cases}$

3. Решите неравенства:

а) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} \geq 1{,}7\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$;

б) $\log_2(9x^2 - 4) - 3\log_2\dfrac{3x+2}{3x-2} > 2$.

Ответы: **1.** а) $\dfrac{\pm 2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; б) 2; в) $\dfrac{1}{9}$; 3; г) −1. **2.** (2; −3), (−2; 3), (18; 13), (−18; −13). **3.** а) $(-\infty; 0)$, $(0; 0{,}5]$, $[2; +\infty)$; б) $\left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right), (2; +\infty)$.

Оглавление

Учебное издание

Башмаков Марк Иванович

Математика
Книга для преподавателя

Методическое пособие

Редактор *Л.В.Честная*
Технический редактор *Н.И.Горбачева*
Компьютерная верстка: *Н.В.Протасова*
Корректор *Г.Н.Петрова*

Изд. № 101113801. Подписано в печать 03.08.2012. Формат 60 × 90/16.
Гарнитура «Школьная». Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,0.
Тираж 1 200 экз. Заказ № 33349.

ООО «Издательский центр «Академия». www.academia-moscow.ru
129085, Москва, пр-т Мира, 101В, стр. 1.
Тел./факс: (495) 648-0507, 616-00-29.
Санитарно-эпидемиологическое заключение № РОСС RU. AE51. Н 16067
от 06.03.2012.

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных издательством
электронных носителей в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

МАТЕМАТИКА

КНИГА ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ

ISBN 978-5-7695-9335-2

9785769593352

Издательский центр «Академия»
www.academia-moscow.ru